Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2022 - Final
Durée : 2h00.

Exercice 1. (7 points)

1. On considère pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ le champ de vecteurs

$$\vec{V} = \left(n\alpha x^{n-1}\cos(y), -x^n \sin(y)\right).$$

(a) Pour quelles valeurs de α et n le champ $\vec{V}$ dérive t-il d'un potentiel scalaire ?
Corrigé [1 point] : On peut voir que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = (0, 0, nx^{n-1}\sin(y)(-1+\alpha))$. Par conséquent, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ssi $\alpha = 1$.

(b) On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire que l'on notera $f(x, y)$. Déterminer $f(x, y)$.
Corrigé [1 point] : Le potentiel scalaire est $f(x, y) = x^n \cos(y) + k$.

(c) En déduire la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ avec $A = (0, 0)$ et $C = (1, 1)$ (préciser l'orientation choisie).
Corrigé [1 point] : Puisque $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire alors

$$\mathcal{T}_{[A\ C]}(\vec{V}) = f(C) - f(A) = f(1,1) - f(0,0) = \cos(1).$$

2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par le triangle ABC avec $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (1, 1)$.

(a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
Corrigé [1,5 points] : On a $\mathcal{C} = [A\ C] \cup [C\ B] \cup [B\ A]$, où

$$[A\ C] = \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = x \end{array} \right. \quad 0 \le x \le 1, \qquad [C\ B] = \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = 1 \end{array} \right. \quad 0 \le x \le 1,$$

$$[B\ A] = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = y \end{array} \right. \quad 0 \le y \le 1.$$

(b) Calculer, pour toute valeur de α, la circulation de $\vec{V}$ le long des segments $[A\ B]$ et $[B\ C]$ (préciser les orientations choisies).
Corrigé [1 point] : D'après la définition de la circulation, on obtient

$$\mathcal{T}_{[C\ B]}(\vec{V}) = \int_{[C\ B]} n\alpha x^{n-1}\cos(y)dx - x^n \sin(y)dy = \cos(1)\int_1^0 n\alpha x^{n-1}dx = -\alpha\cos(1),$$

$$\mathcal{T}_{[B\ A]}(\vec{V}) = \int_{[B\ A]} n\alpha x^{n-1}\cos(y)dx - x^n \sin(y)dy = 0.$$

(c) Soit D le domaine délimité par le triangle ABC. On suppose que

$$\beta = \int\int_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

Calculer, à l'aide du théorème de Green-Riemann, la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ en fonction de α et β, en précisant l'orientation choisie.
Corrigé [1 point] : On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique, on déduit par la formule de Green-Riemann que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}} n\alpha x^{n-1}\cos(y)dx - x^n \sin(y)dy = \int\int_D nx^{n-1}\sin(y)(-1+\alpha)dxdy = \beta.$$

De plus, on sait que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{[A\ C]}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{[C\ B]}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{[B\ A]}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{[A\ C]}(\vec{V}) - \alpha\cos(1).$$

Donc $\mathcal{T}_{[A\ C]}(\vec{V}) = \beta + \alpha\cos(1)$.

(d) Donner la valeur de β lorsque $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire et retrouver la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ dans ce cas, en précisant l'orientation choisie.
Corrigé [0.5 point] : Si $\alpha = 1$, alors on a $\beta = 0$ et par conséquent $\mathcal{T}_{[A\ C]}(\vec{V}) = \cos(1)$.

Exercice 2. (16 points)

1. Soit
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad y < x^2+y^2 < 1,\ x > 0\right\}.$$

   (a) Représenter D graphiquement.
   __Indication__ : On pourra écrire $y = x^2+y^2$ comme l'équation d'un cercle.
   Corrigé [0.5 point] : Puisque $y < x^2+y^2$ équivaut à $x^2+(y-\frac{1}{2})^2 > 1/4$, D est l'intersection de l'intérieur du demi-disque (car $x > 0$) de centre O et de rayon 1 et de l'extérieur du demi-disque (car $x > 0$) de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

   (b) Trouver l'aire de D, en utilisant les résultats connus sur les aires de secteur de disque.
   Corrigé [0.5 point] : On sait que l'aire d'un disque de rayon R vaut πR^2. D'où
$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\left(\pi - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

   (c) Soit $D^- = D \cap \{y \leq 0\}$ et $D^+ = D \cap \{y \geq 0\}$. Calculer les aires de D^+ et de D^-, en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires.
   Corrigé [2 points] : Par le changement de variables $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on peut vérifier que
$$(x,y) \in D^+ \Leftrightarrow \sin(\theta) < r < 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$
$$(x,y) \in D^- \Leftrightarrow 0 < r < 1, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$
   De plus, puisque $|J| = r$, on déduit que
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D^+) &= \int\int_{D^+} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\sin(\theta)}^1 rdr\right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sin(\theta)}^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\theta))d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$
   De même,
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D^-) &= \int\int_{D^-} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\int_0^1 rdr\right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

   (d) En déduire l'aire de D.
   Corrigé [0.5 point] : $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D^+) + \mathcal{A}(D^-) = \frac{3\pi}{8}$.

2. On suppose que $\mathcal{C}$ est le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
   Corrigé [1.5 points] : On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, où
$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta)\end{array}\right. \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \mathcal{C}_2 = \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos(\theta) \\ y = \frac{1}{2}\sin(\theta) + \frac{1}{2}\end{array}\right. \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$
$$\mathcal{C}_3 = \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = y\end{array}\right. \; -1 \leq y \leq 0.$$

   (b) Calculer la circulation de $\vec{U} = (-y, x)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ directement puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.
   Corrigé [1.5 points] :
   __1$^{\text{ère}}$ méthode__ : On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique, en utilisant la définition de la circulation, on obtient
$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{U}) = \int_{\mathcal{C}} -ydx + xdy &= \int_{\mathcal{C}_1} -ydx+xdy + \int_{\mathcal{C}_2} -ydx+xdy + \int_{\mathcal{C}_3} -ydx+xdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}[(\sin(\theta)+1)\sin(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)]d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (1+\sin(\theta))d\theta \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ méthode : D'après la formule de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{U}) = \int_{\mathcal{C}} -ydx + xdy = 2\int\int_D dxdy = 2\mathcal{A}(D) = \frac{3\pi}{4}.$$

(c) En déduire la circulation de $\vec{V} = (x\sin(x^2+y^2), y\sin(x^2+y^2)+x)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
Corrigé [0.5 point] : D'après la formule de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}} x\sin(x^2+y^2)dx + (y\sin(x^2+y^2)+x)dy = \int\int_D dxdy = \mathcal{A}(D) = \frac{3\pi}{8}.$$

3. Soit $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

(a) En effectuant le changement de variables, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, calculer

$$I_1 = \int\int_{D^-} f(x,y)dxdy \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_{D^+} f(x,y)dxdy.$$

Indication : On pourra utiliser que $r = \sin(\theta)$ sur le cercle d'équation $y = x^2+y^2$.
Corrigé [2 points] : On a

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{0}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta = -\frac{\pi}{2}\int_1^0 \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{\pi}{2}.$$

Au vu de la relation $y < x^2+y^2$, nous avons en coordonnées polaires $r\sin(\theta) < r^2$, alors $\sin(\theta) \le r$ pour $0 < r \le 1$, ainsi

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\int_{\sin(\theta)}^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta = -\int_0^{\pi/2}\int_{1-\sin^2(\theta)}^0 \frac{1}{2\sqrt{u}}dud\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta = 1.$$

(b) En déduire la valeur de

$$I = \int\int_D f(x,y)dxdy.$$

Corrigé [0.5 point] : $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + 1$.

4. On considère le volume suivant :

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad y < x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 < 1,\ x > 0,\ z > 0\right\}.$$

(a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$ et déterminer la projection de $\mathcal{V}$ sur le plan (xOy).
Corrigé [0.5 point] : La projection de $\mathcal{V}$ sur le plan (xOy) est le domaine D de la première partie de l'exercice.

(b) Calculer

$$J = \int\int\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{1-x^2-y^2}dxdydz.$$

Corrigé [0.5 point] : On utilise l'intégration par la méthode de bâtons, on obtient

$$J = \int\int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{1-x^2-y^2}dz\right)dxdy = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = I = \frac{\pi}{2}+1.$$

(c) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
Corrigé [1.5 points] : On a

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right)dxdy = \int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$$

En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, comme dans la question 1-(b), on obtient

$$\begin{aligned} V(\mathcal{V}) &= \int\int_{D^-} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy + \int\int_{D^+} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \\ &= \int_{-\pi/2}^{0}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\ rdrd\theta + \int_0^{\pi/2}\int_{\sin(\theta)}^1 \sqrt{1-r^2}\ rdrd\theta. \end{aligned}$$

On intègre par rapport à r, on déduit que

$$\begin{aligned} V(\mathcal{V}) &= \int_{-\pi/2}^{0} \left[\frac{-1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta + \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sin(\theta)}^1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

5. Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V} \cap \{y \leq 0\}$.
   (a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).
   Corrigé [2 points] : Soient

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 < 1,\ x > 0, y > 0\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+z^2 < 1,\ x > 0, z > 0\right\},$$

$$D_3 = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad y^2+z^2 < 1,\ y > 0, z > 0\right\}.$$

Alors, $(S) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ avec

$$\Sigma_1 = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} (x,y) \in D_1, \quad \Sigma_2 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} (x,z) \in D_2, \quad \Sigma_3 = \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} (x,y) \in D_3,$$

et

$$\Sigma_4 = \begin{cases} x = \sqrt{1-z^2}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{1-z^2}\sin(\theta) \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0],\ z \in [0,1] \\ z = z \end{cases}$$

   (b) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (x,y,z)$ à travers (S), lorsque (S) est orientée vers la normale unitaire extérieure.
   Corrigé [2 points] : Puisque, Σ_1 est orientée suivant la normale extérieure $-\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = (0,0,-1)$, Σ_2 est orientée suivant la normale extérieure $-\vec{T}_x \wedge \vec{T}_z = (0,1,0)$ et Σ_3 est orientée suivant la normale extérieure $-\vec{T}_y \wedge \vec{T}_z = (-1,0,0)$, alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = -\int\int_{D_1} \vec{W}.(\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y) dxdy = 0, \quad \phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = -\int\int_{D_2} \vec{W}.(\vec{T}_x \wedge \vec{T}_z) dxdz = 0,$$

$$\phi_{\Sigma_3}(\vec{W}) = -\int\int_{D_3} \vec{W}.(\vec{T}_y \wedge \vec{T}_z) dydz = 0.$$

De même, puisque Σ_4 est orientée suivant la normale $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\sqrt{1-z^2}\cos(\theta), \sqrt{1-z^2}\sin(\theta), z)$, alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_4}(\vec{W}) = \int\int_{\Delta} \vec{W}.(\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) d\theta dz$$

où $\Delta = \{0 \leq z \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\}$. Par conséquent,

$$\phi_{\Sigma_4}(\vec{W}) = \int\int_{\Delta} d\theta dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^1 dz d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Rappel

1. Rotationnel d'un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$: Soit $\vec{V} = (P(x,y), Q(x,y))$. Alors, on définit le rotationnel de $\vec{V}$ par le champs de vecteurs suivant :

$$\mathbf{rot}(\vec{V}) = \left(0, 0, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right).$$

2. Masse d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ de masse curviligne $\mu(x, y, z)$, alors la masse totale de Γ est donnée par la formule suivante :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dxdy.$$

4. Intégrale surfacique : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int \int_{\Sigma} \vec{V}.\vec{n}\ d\sigma.$$