Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2021 - Final
Durée : 1h30.

Exercice 1. (7 points)

1. On définit le domaine suivant :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

   (a) **[1 point]** Faire une figure représentant le domaine D.

   (b) Soient

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}$$

   et

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

   En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer l'aire de D_1 et l'aire de D_2. En déduire l'aire de D.

   Corrigé [2 points]= (1 point pour I_1 et 1 point pour I_2) : Pour calculer l'aire de D_1, on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On peut vérifier que, $(x,y) \in D_1$ ssi $(r,\theta) \in \Delta_1 = \{0 \leq r \leq 1,\ \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ et $|J| = r$. Cela montre que

$$\mathcal{A}(D_1) = \int\int_{D_1} dxdy = \int\int_{\Delta_1} rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 rdrd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

   De même, pour calculer l'aire de D_2, on pose $x = 2r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On peut vérifier que, $(x,y) \in D_2$ ssi $(r,\theta) \in \Delta_2 = \{0 \leq r \leq 1,\ \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ et $|J| = 2r$. Cela montre que

$$\mathcal{A}(D_2) = \int\int_{D_2} dxdy = \int\int_{\Delta_2} 2rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 2rdrd\theta = \pi.$$

   Par conséquent $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D_2) - \mathcal{A}(D_1) = \frac{\pi}{2}$.

2. On note $\mathcal{C}$ le bord de D.

   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.

   Corrigé [2 points]= (1 point pour $\mathcal{C}_1$ et 1 point pour $\mathcal{C}_2$) : On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, où

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta)\end{array}\right. \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = \left\{\begin{array}{l} x = 2\cos(\theta) \\ y = \sin(\theta)\end{array}\right. \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

   (b) Retrouver l'aire de D en utilisant le théorème de Green-Riemann.

   Corrigé [2 points]= (1 pour la circulation sur $\mathcal{C}_1$ et 1 la circulation sur $\mathcal{C}_2$) : On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique, d'après la formule de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_1} -ydx + xdy + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_2} -ydx + xdy.$$

   On utilise les équations paramétriques, on obtient

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta))d\theta = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2. (13 points)

1. On considère le volume :

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 < z < 1,\ y > 0\right\}.$$

(a) **[1 point]** Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$, en utilisant la méthode de bâtons.
Corrigé [2 points] : On utilise l'intégration par la méthode de bâtons, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = \int\int_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 dz\right) dxdy = \int\int_D (1-x^2-y^2)dxdy,$$

où

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 < 1, y > 0\right\}.$$

En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on obient

$$\begin{aligned} V(\mathcal{V}) &= \int\int_D (1-x^2-y^2)dxdy \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (1-r^2)\, rdrd\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. Soit Σ la surface définie par :

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 = z,\ z < 1,\ y > 0\right\}.$$

(a) Donner une paramétrisation de Σ en coordonnées cylindriques.
Corrigé [1 point] : On a

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{z}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta) \quad \theta \in [0,\pi],\ z \in [0,1] \\ z = z \end{array} \right.$$

(b) Calculer l'aire de Σ.
Corrigé [2 points] : On calcule la normale à Σ, $\vec{T}_z \wedge \vec{T}_\theta = (-\sqrt{z}\cos(\theta), -\sqrt{z}\sin(\theta), \frac{1}{2})$, on déduit que

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_\Sigma d\sigma = \int\int_\Delta \|\vec{T}_z \wedge \vec{T}_\theta\| d\theta dz = \frac{1}{2}\int\int_\Delta \sqrt{4z+1}d\theta dz$$

avec $\Delta = \{0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$. t Donc

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{12}\int_0^\pi \left[(4z+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{12}(5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

(c) On suppose que la masse surfacique de Σ est $\mu(x,y,z) = \sqrt{4z+1}$. Calculer le moment d'inertie de Σ par rapport à $\vec{oz}$.
Corrigé [2 points] : On a

$$\mathcal{M}_{\vec{oz}}(\Sigma) = \int\int_\Sigma [d(\vec{oz},(x,y,z))]^2 \mu(x,y,z)d\sigma = \int\int_\Delta z\sqrt{4z+1}\|\vec{T}_z \wedge \vec{T}_\theta\| d\theta dz = \frac{1}{2}\int\int_\Delta z(4z+1)d\theta dz.$$

D'où

$$\mathcal{M}_{\vec{oz}}(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\frac{4z^3}{3} + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{11\pi}{12}.$$

(d) On oriente Σ par la normale unitaire dont la troisième composante est positive. Calculer le flux de $\vec{V} = (y, -x, 1)$ à travers la surface Σ.
Corrigé [1 point] : Puisque, Σ est orientée suivant la normale $\vec{T}_z \wedge \vec{T}_\theta = (-\sqrt{z}\cos(\theta), -\sqrt{z}\sin(\theta), \frac{1}{2})$, alors on déduit que

$$\phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int_\Delta [-z\cos(\theta)\sin(\theta) + z\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{1}{2}]d\theta dz = \int\int_\Delta d\theta dz = \frac{\pi}{2}.$$

3. On considère le champ de vecteurs suivant :

$$\vec{U} = (2y+z, 2x+z, y+x).$$

(a) Montrer que le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire.
Corrigé [0.5 point] : Il suffit de montrer que $\mathbf{rot}(\vec{U}) = \vec{0}$.

(b) Soit Γ le bord de la surface Σ. Paramétrer la courbe Γ.

Corrigé [2 points]= (1 pour Γ_1 et 1 pour Γ_2) : On a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = x^2 \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1$$

et

$$\Gamma_2 = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = 1 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

(c) Calculer de deux façons différentes la circulation $\vec{U}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).
Corrigé [1.5 points]= (0.5 pour la $1^{\text{ère}}$ méthode et 1 point pour la deuxième) :
<u>$1^{\text{ère}}$ méthode</u> : Puisque le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire et Γ est une courbe fermée, alors $\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = 0$.
<u>$2^{\text{ème}}$ méthode</u> : En utilisant la définition de la circulation, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) &= \int_{\Gamma_1} (2y+z)dx + (2x+z)dy + (y+x)dz + \int_{\Gamma_2} (2y+z)dx + (2x+z)dy + (y+x)dz \\
&= \int_{-1}^{1} 3x^2 dx + \int_0^\pi \left[(2\sin(\theta)+1)(-\sin(\theta)) + (2\cos(\theta)+1)(\cos(\theta))\right] d\theta \\
&= 2 - \pi - 2 + \pi = 0.
\end{aligned}$$

Rappel

1. <u>L'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$</u> : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$, alors l'aire de D est

$$\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy.$$

2. <u>Volume d'un domaine de $\mathbb{R}^3$</u> : Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, alors le volume de $\mathcal{V}$ vaut

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz.$$

3. <u>L'aire d'une surface et moment d'inertie</u> :

   (a) Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$, alors l'aire de Σ vaut

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_\Sigma d\sigma.$$

   (b) Si la masse surfacique de Σ est $\mu(x,y,z)$ alors le moment d'inertie de Σ par rapport à l'axe $o\vec{z}$ est

$$\mathcal{M}_{o\vec{z}}(\Sigma) = \int\int_\Sigma [d(o\vec{z},(x,y,z))]^2 \mu(x,y,z) d\sigma,$$

   où $d(o\vec{z},(x,y,z))$ est la distance entre un point $(x,y,z) \in \Sigma$ et $o\vec{z}$.

4. <u>Formule de Green-Riemann</u> : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$