Corrigé du Final MT22 - A2019

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

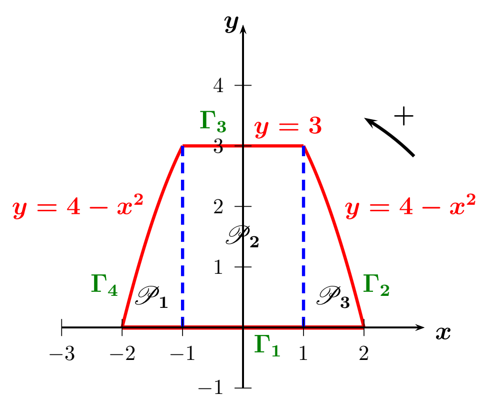
Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \leq 4 - x^2 \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 3\}.$$

1. (a) Faire une figure.

Correction : Le domaine D est la partie délimitée par la courbe rouge constituée de quatres arêtes Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4.



(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Il s'agit d'appliquer les deux formules de Fubini :

- Une première réécriture du domaine D est la suivante

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq y \leq 3 \text{ et } -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}\}.$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx \right) dy \ .$$

- La deuxième réécriture nécessite de découper le domaine D en trois parties : $D = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_3$ avec

$$\mathscr{P}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -2 \leq x \leq -1 \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - x^2\}.$$

$$\mathscr{P}_2 := [-1,1] \times [0,3]$$

$$\mathscr{P}_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - x^2\}.$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{3} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx\ .$$

(c) Soient a et b deux nombres réels. Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_D (ax+b)\,dxdy = \frac{28b}{3}.$$

Correction : • Avec la première formule on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_D (ax+b)\,dxdy &= \int_0^3\left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} ax+b\,dx\right)dy\\
&= \int_0^3\left[a\frac{x^2}{2}+bx\right]_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}dy\\
&= \int_0^3 2b\sqrt{4-y}\,dy = 2b\Big[-\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 = -\frac{4b}{3}+2b\times\frac{2}{3}\times\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{=2^3} = \boxed{\frac{28b}{3}}.
\end{aligned}$$

• Avec la seconde formule on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_{-2}^{-1}\left(\int_0^{4-x^2}(ax+b)\,dx\right)dy + \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{3}(ax+b)\,dx\right)dy + \int_{1}^{2}\left(\int_0^{4-x^2}(ax+b)\,dx\right)dy\\
&= \int_{-2}^{-1}(ax+b)(4-x^2)dx + \int_{-1}^{1}3(ax+b)dx + \int_{1}^{2}(ax+b)(4-x^2)dx\\
&= \int_{-2}^{-1}(4ax+4b-ax^3-bx^2)dx + \int_{-1}^{1}(3ax+3b)dx + \int_{1}^{2}(4ax+4b-ax^3-bx^2)dx\\
&= \left[2ax^2+4bx-a\frac{x^4}{4}-b\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[3a\frac{x^2}{2}+3bx\right]_{-1}^{1} + \left[2ax^2+4bx-a\frac{x^4}{4}-b\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}\\
&= (\cancel{2a}-4b\cancel{-\tfrac{a}{4}}+\tfrac{b}{3})-(\cancel{8a}-8b\cancel{-4a}+\tfrac{8b}{3})\\
&\qquad+\cancel{\frac{3a}{2}}+3b\cancel{-\frac{3a}{2}}+3b+(\cancel{8a}+8b\cancel{-4a}-\tfrac{8b}{3})-(\cancel{2a}+4b\cancel{-\tfrac{a}{4}}-\tfrac{b}{3})\\
&= 14b-\tfrac{14}{3}b = \boxed{\frac{28b}{3}}\ .
\end{aligned}$$

NB : On aurait aussi pu utiliser la symétrie de D d'axe (Oy) pour dire que $\iint_D ax\,dxdy = 0$ car $x\mapsto ax$ est impaire, puis calculer uniquement $\iint_D b\,dxdy$.

2. Soit $D_2 = D\backslash D_1$ où $D_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\ ,\ y\ge 0\}$.

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction : La domaine D_1 est une portion d'ellipse centrée en l'origine de rayons 1 et 2 sur les axes principaux (Ox) et (Oy). On pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta\\ y = 2r\sin\theta\end{array}\right. \qquad \text{avec } r\in[0,1] \text{ et } \theta\in[0,\pi]$$

Le jacobien de ce changement de variable est $|J| = 2r$. Ainsi

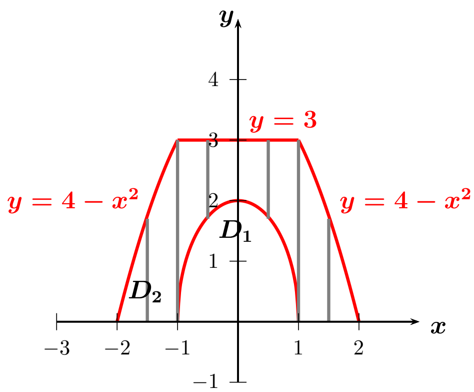
$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi f(r\cos\theta, 2r\sin\theta) \times 2r\,d\theta \right) dr\ .$$

(b) Calculer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 0 \leq z \leq x+3,\ \text{et}\ (x,y) \in D_2\}.$$

(Indication : utiliser le résultat de la question **1.***(c) pour des valeurs de a ou b particulières.)*

Correction : Le domaine d'intégration D_2 est le suivant :



Il s'agit d'un solide de base D_2 et de face supérieure d'équation $z = f(x,y) = x+3 \geq 0$. Le volume est alors donné par la formule

$$\iint_{D_2} (x+3)dxdy = \iint_D (x+3)dxdy - \iint_{D_1} (x+3)dxdy$$

. Pour $a = 1$ et $b = 3$ on a $\displaystyle\iint_D (x+3)dxdy = 28$. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} (x+3)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (2r(r\cos\theta + 3)d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 2r\Big[r\sin\theta + 3\theta\Big]_0^\pi dr = \int_0^1 6\pi r\,dr = \Big[3\pi r^2\Big]_0^1 = 3\pi\end{aligned}$$

Le volume est donc $\boxed{28 - 3\pi}$.

3. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

Correction : Comme indiqué plus haut, le bord Γ de D est constitué de quatres morceaux de courbes paramétrables comme suit :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t : -2 \mapsto 2\ ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\4-t^2\end{pmatrix}, \quad t : 2 \mapsto 1 ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto -1 ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Gamma_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\4-t^2\end{pmatrix}, \quad t : -1 \mapsto -2 ,$$

(b) Calculer directement l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma x^2\,dy$.

Correction : Comme dy s'annule sur Γ_1 et Γ_3, on a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2\,dy = \int_{\Gamma_2} x^2\,dy + \int_{\Gamma_4} x^2\,dy &= \int_2^1 t^2 \times (-2t)dt + \int_{-1}^{-2} t^2 \times (-2t)dt \\ &= \Big[-\frac{t^4}{2}\Big]_{-1}^{-2} + \Big[-\frac{t^4}{2}\Big]_2^1 = -8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 8 = 0.\end{aligned}$$

(c) Retrouver ce résultat à l'aide d'un théorème du cours à préciser.

Correction : Le courbe Γ est une courbe fermée sans point double parcourue dans le sens trigonométrique. Le champ de vecteur $\vec{V}(P = 0, Q = x^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc, d'après le théorème de Green-Riemann on a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2 dy = \iint_\Gamma \vec{V}\cdot\vec{d\ell} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy \\ &= \iint_D 2x\,dxdy = 0,\end{aligned}$$

d'après la question **1.**(c) avec $a = 2$ et $b = 0$.

NB : on peut avoir une circulation de $\vec{V}$ nulle sur un chemin fermé sans que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Soient $A(2, 0, 1)$ et $B(0, \sqrt{3}, 1)$ deux points dans l'espace.

1. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix}x(2z-1)\\y(2z-1)\\x^2+y^2\end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une fonction f telle que $\vec{V} = \nabla f$.

Correction : Une solution possible est $\boxed{f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}(2z-1)}$.

(b) Sans calcul intégral, en déduire le travail de $\vec{V}$ le long du chemin rectiligne orienté $\overrightarrow{AB}$.

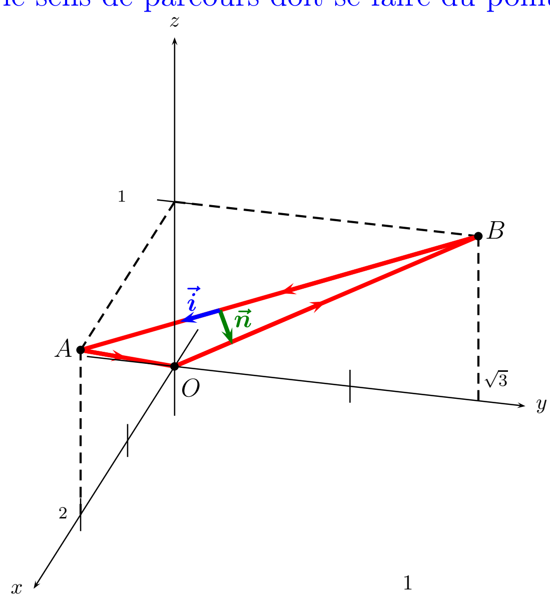
Correction : Comme $\vec{V}$ dérive du potentiel scalaire f, nous avons la formule d'intégration

$$\int_{\vec{AB}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = f(B) - f(A) = \frac{3}{2} - 2 = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

2. On considère la surface plane S délimitée par le triangle fermé (OAB) (où O est l'origine du repère de l'espace).

(a) On oriente S par le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ faisant un angle aigu avec (Ox). Indiquer sur une figure le sens de circulation associé sur le contour du triangle OAB.

Correction : D'après la règle du bonhomme d'Ampère ou du trièdre direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{\boldsymbol{n}})$, le sens de parcours doit se faire du point B vers le point A comme ci-dessous.



(b) Paramétrer le contour du triangle OAB.

Correction :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in [BA] \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\\sqrt{3}(1-t)\\1\end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1\,,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in [AO] \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\0\\t\end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0\,,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in [OB] \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}t\\t\end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1\,,$$

(c) Soit $\vec{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Déterminer le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{U}$ à travers S, par la méthode de votre choix.

Correction : D'après le théorème de Stokes-Ampère, on peut obtenir le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ en calculant la circulation de $\vec{V}$ le long du contour du triangle OAB.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{d\ell} &= \int_{[BA]\cup[AO]\cup[OB]} y\,dx + dy + x\,dz \\
&= \int_0^1 \sqrt{3}(1-t) \times 2dt - \sqrt{3}dt + \int_1^0 2t\,dt + \int_0^1 \sqrt{3}\,dt \\
&= \Big[-\sqrt{3}(1-t)^2 - \sqrt{3}t\Big]_0^1 + \Big[t^2\Big]_1^0 + \Big[\sqrt{3}t\Big]_0^1 \\
&= -\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) - 1 + \sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3} - 1}.
\end{aligned}$$

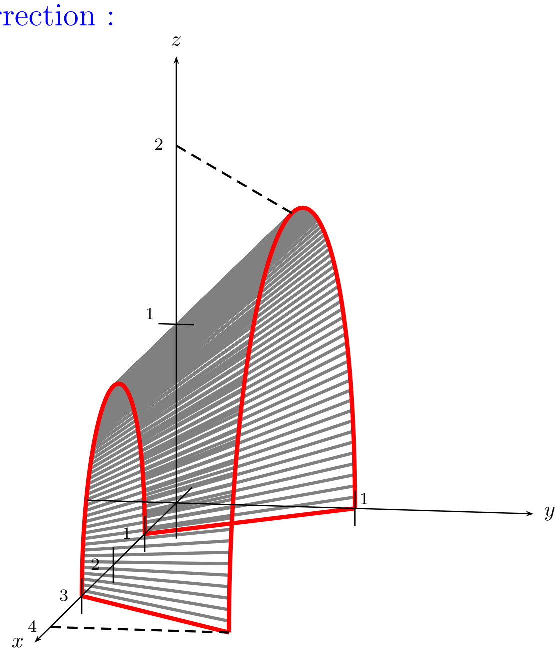
Exercice 3 (Barème approximatif : 7 points)

On considère la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (y+1)^2 = (x-2)^2 + z^2 \; , \; z \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

1. (a) Faire une figure en perspective.

Correction :



(b) Paramétrer Σ en coordonnées cylindriques.

Correction : Une paramétrisation possible est

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\rho\cos\varphi \\ \rho - 1 \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \rho \in [1,2] \text{ et } \varphi \in [0,\pi].$$

(c) Calculer l'aire de Σ.

Correction : Nous devons calculer le jacobien associé à ce changement de variable $\sigma(\rho,\varphi) = ||T_\rho \wedge T_\varphi||$.

$$T_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ 0 \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_\rho \wedge T_\varphi = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ -\rho \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

On obtient $\sigma(\rho,\varphi) = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2 + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho\sqrt{2}$.

$$Aire(\Sigma) = \iint_{[1,2]\times[0,\pi]} \rho\sqrt{2}\,d\rho d\varphi = \sqrt{2}\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \boxed{\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}}$$

(d) Calculer directement le flux de $\vec{W}(-x, y+1, -z)$ à travers Σ. On orientera le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ vers le haut.

Correction : Le champ de vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ doit avoir une troisième composante positive donc on choisit

$$\vec{N} = +T_\rho \wedge T_\varphi = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ -\rho \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

$$\vec{W}\cdot\vec{N} = \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi - 2 \\ \rho \\ -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = -2\rho^2 - 2\rho\cos\varphi\ .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \text{Flux}_\Sigma(\vec{W}) = \iint_\Sigma \vec{W}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,d\sigma &= -\,2\iint_{[1,2]\times[0,\pi]} (\rho^2 + \rho\cos\varphi)\,d\rho d\varphi \\ &= -\,2\int_1^2 [\rho^2\varphi - \rho\sin\varphi]_0^\pi\,d\rho d\varphi = -2\int_1^2 \rho^2\pi\,d\rho \\ &= -\,2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 = \boxed{-\frac{14\pi}{3}} \end{aligned}$$

2. On considère maintenant le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (x-2)^2 + z^2 \leq (y+1)^2\ ,\ z \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

(a) Transformer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Pour $y \in [0,1]$ fixé, on définit la tranche

$$D_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x-2)^2 + z^2 \leq (y+1)^2 \text{ et } z \geq 0\}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\iint_{D_y} f(x,y,z)\,dxdz \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{y+1} \left(\int_0^{\pi} r f(2 + r\cos\theta, y, r\sin\theta)\,d\theta \right) dr \right) dy\end{aligned}$$

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Correction : Le volume de $\mathcal{V}$ est

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{y+1} \left(\int_0^{\pi} r\,d\theta \right) dr \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{y+1} r\pi\,dr \right) dy = \int_0^1 \pi \frac{(y+1)^2}{2} dy \\ &= \pi \left[\frac{(y+1)^3}{6} \right]_0^1 = \boxed{\frac{7\pi}{6}}.\end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{S}$ le bord du volume $\mathcal{V}$, orienté par le champ des normales unitaires extérieures. Déterminer le flux de $\vec{W}$ à travers $\mathcal{S}$, par la méthode de votre choix.

Correction : D'après la formule de Gauss-Ostrogradski on a

$$\text{Flux}_{\Sigma}(\vec{W}) = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{W}\,dxdydz$$

On a $\operatorname{div} \vec{W}(x,y,z) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(y+1)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = -1 + 1 - 1 = -1$. Par conséquent

$$\text{Flux}_{\Sigma}(\vec{W}) = -\iiint_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz = -Vol(\mathcal{V}) = \boxed{-\frac{7\pi}{6}}.$$