Corrigé du Médian MT22 - A2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{et} \qquad f_2(x,y) = x\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}).$$

1. Montrer que la fonction f_1 est continue en $(0,0)$.
   Correction : On utilise les coordonnées polaires

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ |f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) - f_1(0,0)| = |\ln(1+r) - \ln 1| = \ln(1+r) \underset{r\to 0}{\to} 0.$$

   La C.S. de continuité de f est démontrée en $(0,0)$.

2. (a) La fonction f_1 admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
   Correction : On commence par étudier l'existence des dérivées partielles premières en $(0,0)$:

$$\frac{f_1(h,0)-f_1(0,0)}{h} = \frac{\ln(1+|h|)-\ln 1}{h} = \begin{cases} \text{si h>0 } \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0^+}{\to} 1 \\ \text{si h<0 } \frac{\ln(1-h)}{h} \underset{h\to 0^-}{\to} -1 \end{cases}$$

   La limite n'existe pas donc le nombre $A = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.
   Par symétrie, le nombre $B = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas non plus.

   (b) Justifier que f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   Correction : Les dérivées partielles premières de f_1 n'existent pas en $(0,0)$ donc la fonction f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$.

3. Déterminer les dérivées partielles premières de f_2 en $(x,y)\neq(0,0)$.
   Correction : On a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) + x\times\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})}$$

4. Justifier que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 0$.

Correction :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\ln(1+|h|)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln(1+|h|) = 0.$$

Par symétrie, on a aussi $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 0$

5. Montrer que la fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction : • Par somme, produit, quotient et composition de fonctions usuelles, les dérivées partielles premières de g sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

• Pour la continuité de $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ en $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\ln(1+r) + \frac{r\cos^2\theta}{1+r}\right| \leq \ln(1+r)+\frac{r}{1+r} \underset{r\to 0}{\to} 0.$$

La C.S. de continuité de $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ est démontrée en $(0,0)$. Par conséquent la fonction $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)\right| = \left|\frac{r\cos\theta\sin\theta}{1+r}\right| \leq \frac{r}{1+r} \underset{r\to 0}{\to} 0.$$

La C.S. de continuité de $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ est démontrée en $(0,0)$. La fonction $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ est également continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ un paramètre et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2-\lambda y^2).$$

1. Déterminer le gradient de la fonction f.

Correction :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2+2x-\lambda y^2) \\ e^{x-y}(-x^2+\lambda y^2-2\lambda y)\end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors la fonction f admet deux points critiques à préciser.

Correction :On doit résoudre le système $\nabla f(x,y) = \vec{0}$.

$$\left\{\begin{array}{c} e^{x-y}(x^2+2x-\lambda y^2) = 0 \\ e^{x-y}(-x^2+\lambda y^2-2\lambda y) = 0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c} x^2+2x-\lambda y^2 = 0 \ (L_1) \\ -x^2+\lambda y^2-2\lambda y = 0 \ (L_2)\end{array}\right.$$

La somme L_1+L_2 implique que $2x-2\lambda y = 0$, soit $x = \lambda y$. Par substitution dans l'une ou l'autre équation on trouve

$$\begin{aligned} -(\lambda y)^2 + \lambda y^2 - 2\lambda y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda y\big((1-\lambda)y-2\big) = 0 \\ &\underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad y\big((1-\lambda)y-2\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ ou } (1-\lambda)y-2 = 0 \\ &\underset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad y = 0 \text{ ou } y = \frac{2}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

La fonction admet deux points critiques $(0,0)$ et $(\frac{2\lambda}{1-\lambda}, \frac{2}{1-\lambda})$.

Dans la suite on pose $\boldsymbol{\lambda = 3}$.

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

   Correction : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donc ses dérivées partielles secondes croisées sont égales.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x-y}(x^2+4x+2-3y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{x-y}(-x^2-2x+3y^2-6y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x-y}(x^2-3y^2+12y-6)$$

4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum ou point selle).

   Correction : • Pour le point $(0,0)$:

$$a=2,\ b=0 \text{ et } c=-6 \Rightarrow \widetilde{\Delta} = b^2-ac = 12 > 0.$$

   Il s'agit d'un point selle.

   • Pour le point $(-3,-1)$:

$$a=-4e^{-2},\ b=6e^{-2} \text{ et } c=-12e^{-2} \Rightarrow \widetilde{\Delta} = b^2-ac = -12e^{-4} < 0.$$

   Comme $a<0$, le point $(-3,-1)$ réalise un maximum local qui vaut $f(-3,-1) = 6e^{-2}$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres. Soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins et **paire**. On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y \neq z\}$ par

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \alpha xy + z^3 \\ x^2 - z\varphi(y-z) \\ \beta xz^2 + y\varphi(y-z) \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{V}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha_0\ , \quad \beta = \beta_0 \quad \text{et } \forall\, t>0,\ t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0,$$

   où α_0 et β_0 sont deux réels à préciser.

   Correction :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}(M) &= \begin{pmatrix} \varphi(y-z) + y\varphi'(y-z) - \big(-\varphi(y-z) + z\varphi'(y-z)\big) \\ 3z^2 - \beta z^2 \\ 2x - \alpha x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\varphi(y-z) + (y-z)\varphi'(y-z) \\ (3-\beta)z^2 \\ (2-\alpha)x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}(M)=\vec{0}$ si et seulement si

$$\alpha=2,\quad \beta=3\quad \text{et}\quad \forall (y,z)\in\mathbb{R}^2,\ y\neq z,\quad 2\varphi(y-z)+(y-z)\varphi'(y-z).$$

Par changement de variable $t=y-z$ et parité de la fonction φ, la dernière condition équivaut à

$$\forall\, t>0,\ t\varphi'(t)+2\varphi(t)=0.$$

2. Déterminer la forme générale des fonctions φ de sorte que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
   Correction : On écrit $\varphi'(t)=-\frac{2}{t}\varphi(t)$. On trouve $\varphi(t)=Ce^{-2\ln|t|}=Ce^{\ln\frac{1}{t^2}}=\frac{C}{t^2}$. La condition initiale sur $\vec{V}$ implique $\varphi(1)=1$ soit $C=1$. On a donc

$$\varphi(y-z)=\frac{1}{(y-z)^2}.$$

3. Déterminer la forme générale des fonctions $f:D\to\mathbb{R}$ telles que $\vec{V}=\nabla f$.
   Correction : Trouver $f(x,y,z)=x^2y+xz^3+\dfrac{z}{y-z}+C, C\in\mathbb{R}$.
   - On pose le système $\nabla f=\vec{V}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &=& 2xy+z^3 \quad (L_1)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &=& x^2-\dfrac{z}{(y-z)^2}\quad (L_2)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &=& 3xz^2+\dfrac{y}{(y-z)^2}\quad (L_3)\end{cases}$$

   - Intégraton partiellede (L_1) :

$$(\#)\qquad f(x,y,z)=\int\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx=x^2y+xz^3+C_1(y,z).$$

   - Identitification avec (L_2) puis calcul de $C_1(y,z)$:

$$(\#)\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2+\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)\underset{\text{Comparaison avec } L_2}{\Rightarrow}\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)=-\frac{z}{(y-z)^2}$$

   Une intégration partielle par rapport à y entraîne :

$$(\#\#)\qquad C_1(y,z)=\int\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)dy=\frac{z}{y-z}+C_2(z).$$

   - Identification avec (L_3) puis calcul de C_2 :

$$(\#)\text{ et }(\#\#)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3xz^2+\frac{1}{y-z}+\frac{z}{(y-z)^2}+C_2'(z)=3xz^2+\frac{y}{(y-z)^2}+C_2'(z)$$

$$\underset{\text{Comparaison avec } L_3}{\Rightarrow}\quad C_2'(z)=0\quad\Rightarrow\quad C_2(z)=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

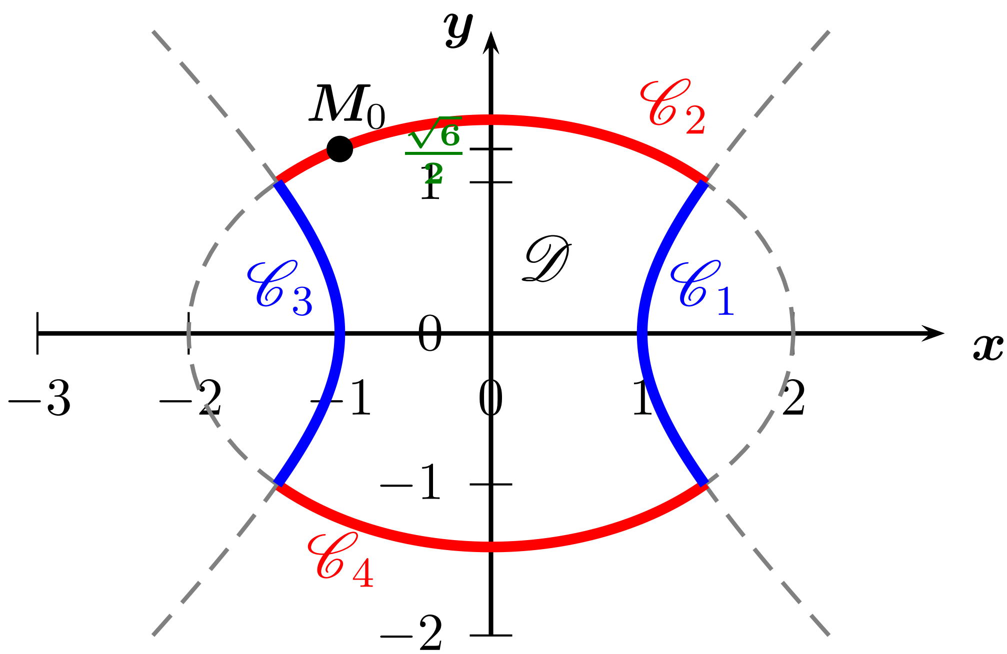
   D'où le résultat annoncé.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \text{ et } x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

1. Faire une figure.

   Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

   Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de quatres morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4$.

$$M(x, y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in [-1, 1], \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ t \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}], \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y) \in \mathscr{C}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in [-1, 1], \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_3(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+t^2} \\ t \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y) \in \mathscr{C}_4 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}], \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_4(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}) \in \mathscr{C}$.

   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.

   Correction : voir la figure.

(b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Correction : On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_2(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} 2\cos\theta_0 = -1 \\ \sqrt{2}\sin\theta_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = M_0 + \lambda \Phi_2'(\tfrac{2\pi}{3}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \lambda\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} - \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Correction : La première ligne implique $\lambda = -\frac{1+x}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(1+x)}{3}$. Par substitution dans la deuxième composante, on trouve

$$\boxed{y = \frac{2\sqrt{6}}{3} + x\frac{\sqrt{6}}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y\sqrt{6} - x = 4}.$$