Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2016 - Partiel
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. On considère la fonction

$$f(x,y) = 6x - 3y - 3x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3.$$

1. Déterminer les points critiques.
   Indication : Trouver les points sous la forme (x^*, y^*) avec $(x^*)^2 = (y^*)^2$.
   Corrigé : Nous avons

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6 - 9x^2 - y^2 + 4xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3 - 2xy + 2x^2 + 3y^2,$$

   ainsi on cherche les points (x^*, y^*) solutions du système

   $$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 4xy = 6 \\ 2x^2 + 3y^2 - 2xy = 3 \end{cases}$$

   en multipliant la deuxième ligne par 2, nous pouvons éliminer les termes en xy, et nous avons $|x| = |y|$, en remplaçant dans le système nous donne : $A = (1,1)$, $B = (-1,-1)$, $C = (\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}})$ et $D = (-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}})$.
2. Déterminer la nature des points critiques.
   Corrigé :

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -18x + 4y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x + 6y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y + 4x.$$

   On vérifie que $\Delta_A > 0$ et $\Delta_B > 0$ donc ce sont des points selles, par contre C est un maximum local et D est un minimum local.

Exercice 2. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le point $(x_0, 0)$.

1. Etudier la continuité de la fonction f au point en ce point.
   Corrigé : Par la condition suffisante de continuité nous avons

   $$|f(x_0 + r\cos\theta, r\sin\theta) - f(x_0, 0)| = \left|(x_0 + r\cos\theta) r \sin\theta \sin(\frac{1}{r\sin\theta})\right| \leq r|x_0| + r^2.$$

   Nous en déduisons aisément la continuité.
2. Les dérivées partielles à l'ordre 1 de la fonction f existent-elles en ce point ?
   Corrigé :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0,$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, k) - f(x_0, 0)}{k} = x_0 \lim_{k\to 0} \sin(1/k)$$

   or cette dernière limite n'existe que si $x_0 = 0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y, seulement au point $(0,0)$ mais pas en $(x_0, 0)$, si $x_0 \neq 0$.

3. La fonction f est-elle différentiable en ce point ?
Corrigé : Nous savons que les D.P. n'existent qu'au point $(0,0)$ i.e. pour $x_0 = 0$, il nous reste à vérifier si $\varepsilon(h,k)$ tends vers 0 lorsque $(h,k) \to (0,0)$ continument.

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta \sin(1/r\sin\theta)}{r}$$

on peut donc conclure par la condition suffisante de continuité. Donc f est différentiable au point $(0,0)$.

4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$.
Corrigé :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin(1/y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin(1/y) - \frac{x}{y}\cos(1/y).$$

5. Etudier la continuité de dérivées partielles à l'ordre 1 en $(x_0, 0)$.
Corrigé : Par la condition suffisante de continuité nous avons

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\right| \leq r$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ au point $(x_0, 0)$.
Nous savons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe qu'au point $(0,0)$ i.e. pour $x_0 = 0$, il suffit donc d'étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$, qu'au point $(0,0)$. Il suffit de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc elle n'est pas continue au point $(0,0)$.

Exercice 3. Soit α une constante réelle. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - 2\alpha z\right) \\ \\ y\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - 2\alpha z)\right) \\ \\ \dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle valeur α_0 de α le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?
Corrigé : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus on sait que

$$rot(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \dfrac{-yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 2y + \dfrac{yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\alpha y \\ \\ \dfrac{xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x + \dfrac{-xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha x \\ \\ \dfrac{xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{-xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(\alpha-1) \\ \\ 2x(1-\alpha) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

on voit que pour $\alpha = 1$, on a $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. Donc $\alpha_0 = 1$.

2. On suppose que $\alpha = \alpha_0$. Calculer le potentiel scalaire f dont dérive $\vec{V}$.
Corrigé : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, alors il existe une fonction scalaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$. Donc, si $\alpha = 1$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} - 2xz & (eq1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} - 2yz & (eq2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} - (x^2 + y^2) & (eq3) \end{cases}$$

On intègre la première équation $(eq1)$ par rapport à x, on obtient

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} - x^2 z + g(y, z)$$

On dérive l'équation précédente par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z)$$

On utilise la deuxième équation $(eq2)$, on déduit que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = -2yz$$

En intègrant par rapport à y, on obtient que $g(y, z) = -y^2 z + h(z)$. Donc

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} - x^2 z - y^2 z + h(z)$$

On dérive l'équation précédente par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} - x^2 - y^2 + h'(z)$$

On utilise la troisième équation $(eq3)$, on déduit que $h'(z) = 0$, donc $h(z) = cte$. Cela montre que

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} - x^2 z - y^2 z + cte$$

Exercice 4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante :

$$(S_\alpha) : \quad x^2 + y^2 - \alpha z^2 - \alpha = 0.$$

1. En discutant selon les valeurs de α déterminer la nature de (S_α). Faire une figure représentant les cas possibles.

   Corrigé : Tout d'abord, on peut vérifier que cette équation est définie seulement pour $\alpha \geq 0$, puisque $x^2 + y^2 = \alpha(z^2 + 1)$. Dans le cas $\alpha = 0$, on obtient la droite $\{x = 0, y = 0\}$. Par ailleurs, pour $\alpha > 0$, obtient un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe $\vec{oz}$.

2. Obtenir une équation paramétrique de (S_α).
Corrigé : Si $\alpha = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$(S_\alpha) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Si $\alpha > 0$, alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$$(S_\alpha) : \begin{cases} x = \sqrt{\alpha(z^2+1)}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{\alpha(z^2+1)}\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

3. Dans la suite, on suppose que $\alpha \neq 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point appartenant à (S_α). Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à (S_α) en M_0.
   Corrigé : Puisque $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (S_\alpha)$, on sait que $x_0^2 + y_0^2 - \alpha z_0^2 - \alpha = 0$. Alors le plan tangent est

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - \alpha z_0(z - z_0) = x_0 x + y_0 y - \alpha z_0 z - \alpha = 0.$$

4. Trouver le plan tangent à (S_α) en M_0 qui contient le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et les points $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.
   Corrigé : On a $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{N} = (x_0, y_0, -\alpha z_0)$. Cela implique que $\vec{u}.\vec{N} = x_0 + y_0 = 0$. De plus, on a

$$x_0 + y_0 - \alpha z_0 - \alpha = 0$$

et

$$-x_0 + y_0 - \alpha = 0.$$

Cela montre que $z_0 = -1$, $y_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$. On injecte le tout dans l'équation de (S_α), on déduit que $\alpha = 4$.