Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2019 - Médian
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue au point $(0,0)$?
   Corrigé : En utilisant la condition suffisante de continuité, on a

   $$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - 0| = |r\sin(\theta)\left(1 + 2\sin^2(\theta)\right)| \leq 3r$$

   et $3r$ converge vers 0, lorsque r tends vers 0. D'où la continuité au point $(0,0)$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$, notées $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   Corrigé :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \text{ (car } y = 0)$$

   et

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 3.$$

3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, pour $(x,y) \neq (0,0)$. Puis, étudier la continuité de chacune des dérivées partielles de f.
   Corrigé : Pour $(x,y) \neq (0,0)$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

   On remarque (par exemple) que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = -1$$

   qui ne converge pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, lorsque x converge vers 0, d'où la non continuité.

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+9y^2)(x^2+y^2) - 2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

   On remarque (par exemple) que

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 1$$

   qui ne converge pas vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, lorsque x converge vers 0, d'où la non continuité.
4. La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$?
   Corrigé :

   $$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - 3k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-2h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}},$$

   et

   $$\varepsilon(h,h) = -\frac{\sqrt{2}h}{2|h|} \not\to 0, \quad (h \to 0)$$

   d'où la non-différentiabilité de f au point $(0,0)$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   Corrigé :
$$Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$
2. Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction f.
   Corrigé :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\ln(x))^2 + y^2 + 2\ln(x).$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$
3. Déterminer les points critiques de la fonction f.
   Corrigé : Les points (x^*, y^*) tels que les deux dérivées partielles s'annulent simultanément sont donnés par $y^* = 0$ et $\ln(x^*) + 2 = 0$ ou $\ln(x^*) = 0$, soit $x^* = e^{-2}$ ou $x^* = 1$. Alors, on a deux points critiques $(e^{-2}, 0)$ et $(1, 0)$
4. Étudier la nature des points critiques.
   Corrigé : On a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x.$$
   Alors $\Delta(e^{-2}, 0) > 0$ d'où le point $(e^{-2}, 0)$ est un point selle. De plus, $\Delta(1, 0) < 0$ et $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2 > 0$, d'où le point $(1, 0)$ est un point de minimum local.

Exercice 3. Soit le champ de vecteurs $\vec{V} = (\alpha y, x + 2z, 2y + e^{\alpha z})$.

1. Pour quelles valeurs de α, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?
   Corrigé : On doit trouver la valeur de α telle que $\vec{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$. La troisième composante du vecteur $\vec{rot}(\vec{V})$ ne s'annule que pour $\alpha = 1$.
2. On suppose que $\vec{V}$, dérive d'un potentiel scalaire. Déterminer le potentiel.
   Corrigé : Dans cette partie $\alpha = 1$, ainsi, on cherche $f(x, y, z)$ telle que $\vec{grad}(f) = \vec{V}$, soit, en utilisant l'égalité des deux premières composantes
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y \Rightarrow f(x, y, z) = xy + k(y, z).$$
   en remplaçant f dans l'égalité des deuxièmes composantes on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + 2z \Longleftrightarrow \frac{\partial k}{\partial y}(y, z) = 2z \Rightarrow k(y, z) = 2yz + c(z),$$
   ainsi, on a $f(x, y, z) = xy + 2yz + c(z)$. Finalement, l'égalité des troisièmes composantes donne que $c('z) = e^z$, et donc que $c(z) = e^z + k$. Ainsi le potentiel scalaire est donné par
$$f(x, y, z) = xy + 2yz + e^z + k.$$
3. Pour quelles valeurs de α, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur ?
   Corrigé : On cherche la valeur de α telle que $div(\vec{V}) = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$.
4. On se place dans le cas où, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur. On note
$$\vec{A} = x(g(z), h(y) + 1, -h(z)).$$
   Trouver g et h pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$.
   Corrigé : Dans cette partie on considère que $\alpha = 0$, et $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$ équivaut à
$$\begin{cases} h(z) + xg'(z) = x + 2z \\ h(y) = 2y \end{cases}$$
   d'où $g(z) = z + c$ et $h(y) = 2y$.

Exercice 4.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante :

$$(S_\alpha): \quad x^2 + y^2 - \alpha z^2 = \alpha - 1.$$

1. En discutant selon les valeurs de α déterminer la nature de (S_α). Faire une figure représentant les cas possibles.

   Corrigé : Tout d'abord, on peut vérifier que cette équation est définie seulement pour $\alpha > 0$, puisque $x^2 + y^2 = \alpha z^2 + \alpha - 1$. Dans le cas $\alpha > 1$, on obtient un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe $\vec{oz}$. Dans ce cas, l'équation paramétrique est

$$(S_\alpha) = \begin{cases} x = \sqrt{\alpha - 1 + \alpha z^2}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{\alpha - 1 + \alpha z^2}\sin(\theta) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

   De plus, pour $\alpha = 1$, on obtient un cône de révolution autour de l'axe $\vec{oz}$, d'équation paramétrique

$$(S_1) = \begin{cases} x = |z|\cos(\theta) \\ y = |z|\sin(\theta) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

   Par ailleurs, pour $0 < \alpha < 1$, on obtient un hyperboloïde à deux nappes de révolution autour de l'axe $\vec{oz}$, d'équation paramétrique

$$(S_\alpha) = \begin{cases} x = \sqrt{\alpha - 1 + \alpha z^2}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{\alpha - 1 + \alpha z^2}\sin(\theta) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,\ z \leq -\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}} \text{ ou } z \geq \sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}} \\ z = z \end{cases}$$

2. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque appartenant à (S_α). Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à (S_α) en M_0.

   Corrigé : Puisque $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (S_\alpha)$, on sait que $x_0^2 + y_0^2 - \alpha z_0^2 = \alpha - 1$ et de plus $\vec{N} = 2(x_0, y_0, -\alpha z_0)$ est vecteur normal à (S_α) au point M_0. Alors le plan tangent est

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - \alpha z_0(z - z_0) = x_0 x + y_0 y - \alpha z_0 z - \alpha + 1 = 0.$$

3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Trouver le plan tangent à (S_α) en M_0 qui contient le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et les points $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.
   Corrigé : On a $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{N} = (x_0, y_0, -\alpha z_0)$. Cela implique que $\vec{u}.\vec{N} = x_0 + y_0 = 0$. De plus, on a

$$x_0 + y_0 - \alpha z_0 - \alpha + 1 = 0$$

   et

$$-x_0 + y_0 - \alpha + 1 = 0.$$

   Cela montre que $z_0 = \frac{-\alpha+1}{\alpha}$, $y_0 = \frac{\alpha-1}{2}$ et $x_0 = \frac{-\alpha+1}{2}$. On injecte le tout dans l'équation du plan tangent, on obtient que l'équation du plan tangent $-x + y + 2z = 2$.