Université de Technologie de Compiégne

MT22 - Mai 2023 - Médian-Corrigé

Exercice 1. (6 points) On considère la fonction

$$f(x,y) = 6x - 3y - 3x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3.$$

1. Déterminer les points critiques.
   Indication : On cherchera les points critiques sur les deux droites $y = x$ et $y = -x$.
   Corrigé (3 points) : Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6 - 9x^2 - y^2 + 4xy, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3 - 2xy + 2x^2 + 3y^2,$$

   ainsi on cherche les points (x^*, y^*) solutions du système

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 4xy = 6 \\ 2x^2 + 3y^2 - 2xy = 3 \end{cases}$$

   en multipliant la deuxième ligne par 2, nous pouvons éliminer les termes en xy, et nous avons $|x| = |y|$, en remplaçant dans le système nous donne : $A = (1,1)$, $B = (-1,-1)$, $C = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ et $D = \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.
2. Déterminer la nature des points critiques.
   Corrigé (3 points) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -18x + 4y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x + 6y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y + 4x.$$

   On vérifie que $\Delta_A > 0$ et $\Delta_B > 0$ donc ce sont des points selles, par contre C est un maximum local et D est un minimum local.

Exercice 2. (8 points) Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le point $(x_0, 0)$. En discutant selon les valeurs de x_0 traiter les points suivants :

1. Étudier la continuité de f en $(x_0, 0)$.
   Corrigé (1 point) : Par la condition suffisante de continuité nous avons

$$|f(x_0 + r\cos\theta, r\sin\theta) - f(x_0, 0)| = \left|(x_0 + r\cos\theta) r \sin\theta \sin(\frac{1}{r\sin\theta})\right| \leq r|x_0| + r^2.$$

   Nous passons à la limite $r \to 0$ nous en déduisons aisément la continuité.
2. Les dérivées partielles à l'ordre 1 de f existent-elles en ce point ?
   Corrigé (2 points) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, k) - f(x_0, 0)}{k} = x_0 \lim_{k \to 0} \sin(1/k)$$

   or cette dernière limite n'existe que si $x_0 = 0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y, seulement au point $(0,0)$ mais pas en $(x_0, 0)$, si $x_0 \neq 0$.

3. La fonction f est-elle différentiable en ce point ?
Corrigé (1 point) : Nous savons que les D.P. n'existent qu'au point $(0,0)$ i.e. pour $x_0 = 0$, il nous reste à vérifier si $\varepsilon(h,k)$ tends vers 0 lorsque $(h,k) \to (0,0)$ continument.

$$|\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{r^2 \sin\theta\cos\theta\sin(1/r\sin\theta)}{r}\right| \leq r$$

en passant à limite $r \to 0$, on peut donc conclure par la condition suffisante de continuité que f est différentiable au point $(0,0)$.

4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$.
Corrigé (2 points) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin(1/y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin(1/y) - \frac{x}{y}\cos(1/y).$$

5. Étudier la continuité des dérivées partielles à l'ordre 1 en $(x_0, 0)$.
Corrigé (2 points) : Par la condition suffisante de continuité nous avons

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\right| \leq r$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ au point $(x_0, 0)$.
Nous savons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe qu'au point $(0,0)$ i.e. pour $x_0 = 0$, il suffit donc d'étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$, qu'au point $(0,0)$. Il suffit de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc elle n'est pas continue au point $(0,0)$.

Exercice 3. (7 points) Soit α une constante réelle.

1. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\[2ex] \dfrac{\alpha y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour quelle valeur α_1 de α le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?
   Corrigé : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus on sait que

$$rot(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \dfrac{-yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\alpha yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \dfrac{xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \dfrac{-\alpha xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1+\alpha)yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] 0 \\[2ex] \dfrac{(1-\alpha)xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

   on voit que pour $\alpha = 1$, on a $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. Donc $\alpha_1 = 1$.

(b) On suppose désormais que $\alpha = \alpha_1$. Calculer le potentiel scalaire f dont dérive $\vec{V}$.
Corrigé : Vu que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, alorson sait qu' il existe une fonction scalaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{V} = \vec{grad} f$. Donc, si $\alpha = 1$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} & (eq1) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} & (eq2) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} & (eq3) \end{cases}$$

On intégre l'équation $(eq1)$ par rapport à x, on obtient

$$f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2} + g(y,z).$$

On dérive ensuite cette équation par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$$

On utilise l'équation $(eq2)$, on déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$, du coup $g(y,z) = h(z)$. Donc

$$f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2} + h(z).$$

On procéde de la même façon, on dérive cette équation par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} + h'(z)$$

On utilise l'équation $(eq3)$, on déduit que $h'(z) = 0$, donc $h(z) = cte$ et par conséquent

$$f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2} + cte.$$

(c) Calculer le Laplacien de f.
Corrigé : Si $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(d) Retrouver le résultat précédent en utilisant les coordonnées sphériques.
<u>**Rappel**</u> : *Soit r, θ et ϕ les coordonnées sphériques d'un point $M = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors le Laplacien de f en coordonnées sphériques est donné par la formule suivante :*

$$\Delta f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) =$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,\phi) - \frac{\tan(\phi)}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\theta,\phi)$$

où $f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) = g(r,\theta,\phi)$.

Corrigé : On peut vérifier que si on considère les coordonnées sphériques alors on a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et par conséquent, $f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi) = \sqrt{1+r^2}+cte = g(r,\theta,\phi)$. En utilsant la fomule du laplacien en coordonnées sphériques on conclut que

$$\Delta f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) =$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{r^2}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{r^2}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. On considère maintenant le champ de vecteurs :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ \dfrac{-2\alpha x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour quelle valeur α_2 de α le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel vecteur ?
   Corrigé : $\vec{U}$ dérive d'un potentiel vecteur si $\mathrm{div}(\vec{U}) = 0$. De plus,

$$\mathrm{div}(\vec{U}) = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\alpha xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2\alpha-1)xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

   Cela montre que pour $\alpha = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ la divergence est nulle.

   (b) On suppose désormais que $\alpha = \alpha_2$. Soient P, Q et R trois fonctions dérivables définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} P(y) \\ \\ Q(x) \\ \\ R(1+x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}.$$

   Trouver P, Q et R pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{U}$, $P(0) = Q(0) = 0$ et

   Corrigé : L'équation $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{U}$ dans le cas $\alpha = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, implique que

$$\begin{pmatrix} 2yR'(1+x^2+y^2+z^2) \\ \\ -2xR'(1+x^2+y^2+z^2)) \\ \\ Q'(x) - P'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Du coup, si on note $u = 1+x^2+y^2+z^2$, on obtient $R'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ et $Q'(x) = P'(y)$. Alors, $R(u) = \sqrt{u} + k_1$ et $Q'(x) = P'(y) = k_2$. Par conséquent, $R(u) = \sqrt{u} + k_1$, $Q(x) = k_2 x + k_3$ et $P(y) = k_2 y + k_4$. Vu que $P(0) = Q(0) = 0$ et $P(1) = Q(1) = R(1) = 1$ on déduit finalement que $R(u) = \sqrt{u}$, $Q(x) = x$ et $P(y) = y$.