Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2023- Final
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (6 points) On définit le domaine suivant :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y - x - 1 \leq 0\}.$$

1. Représenter graphiquement D.
2. On note $\mathcal{C}$ le bord de D. Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
3. On suppose que $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique. Déterminer la circulation de $\vec{V} = (y^2, -xy)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
4. Soient
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y - x - 1 \leq 0,\ -1 \leq x \leq 0\},$$
et $D_2 = D \backslash D_1$. Calculer
$$I_1 = \int\int_{D_1} y dx dy \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_{D_2} y dx dy.$$
5. Retrouver la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Exercice 2. (2 points)

1. On considère la fonction $g(t) = \sqrt{1 + t^2}$. Soit $I(t)$ la primitive de $g(t)$, vérifiant $I(0) = 0$. Vérifier que
$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\text{argsh}(t) + t\sqrt{1 + t^2}\right),$$
en justifiant votre réponse.
Indication : Nous rappelons que
$$\text{argsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$
2. Représenter graphiquement (allure) et calculer la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation paramétrique :
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exercice 3. (12 points)

1. Soit Σ la surface définie par :
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad z = y - x,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$
   (a) Faire une figure représentant la surface Σ.
   (b) Exprimer l'intégrale surfacique de $f(x, y, z)$ sur Σ à l'aide d'une intégrale double en x et y.
   (c) En déduire l'aire de Σ.
2. On oriente Σ par la normale unitaire $\vec{n}_\Sigma$ dont la troisième composante est positive. Soit $\vec{U} = (xy, yz, xz)$.
   (a) Calculer le flux de $\textbf{rot}(\vec{U})$ à travers la surface Σ.
   (b) Soit Γ le bord de Σ. Donner une paramétrisation de la courbe Γ.
   (c) Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe Γ, en choisissant l'orientation conduisant à l'égalité suivante :
$$\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = \int_\Gamma xy dx + yz dy + xz dz = \int\int_\Sigma \text{rot}(\vec{U}).\vec{n}_\Sigma\, d\sigma.$$
3. On considère le volume suivant :
$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq z \leq y - x,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$
   (a) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
   (b) Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V}$. On suppose que (S) est orientée par la normale qui pointe vers l'extérieur de $\mathcal{V}$. Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).
   (c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (0, y, z)$ à travers (S).

Rappel

1. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

2. Masse et longueur d'une courbe : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors

   (a) La masse totale de $\mathcal{C}$ est donnée par formule suivante :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

   (b) La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

3. Flux à travers d'un surface : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}_\Sigma$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int_\Sigma \vec{V}.\vec{n}_\Sigma\, d\sigma.$$

4. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$