**Université de Technologie de Compiègne**

**MT22 - Avril 2022 - Médian**
**Durée : 1h30.**
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

**Exercice 1. (6 points)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y + \frac{8}{xy}.$$

1. Préciser le domaine de définition de $f$.
   **Corrigé (1pt)** : $f$ est définie dans le domaine suivant

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x \neq 0, y \neq 0\right\}.$$

2. Déterminer les dérivées partielles premières de $f$.
   **Corrigé (1 pt) :** Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{8}{x^2 y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{8}{xy^2}.$$

3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de $f$.
   **Corrigé (1 pt)** : On cherche les points $(x,y) \neq (0,0)$ solutions du système

$$\begin{cases} x^2 y = 8 \\ xy^2 = 8. \end{cases}$$

   Après avoir simplifier par $xy$, en obtenant $x = y$. En remplaçant dans le système nous donne $x = 2$ et $y = 2$. Alors $(2,2)$ est le seul point critique.

4. La fonction $f$ admet-elle un point d'extremum local ? Justifier.
   **Corrigé (2 pts) :** On calcule les dérivées partielles d'ordre 2, à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{16}{x^3 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{8}{x^2 y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{16}{xy^3}.$$

   On note $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = 1$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2) = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 1$. On vérifie que $\Delta = 4(b^2 - ac) = -3 < 0$ et $a > 0$ donc ce point est un minimum local.

5. La fonction $f$ admet-elle un point d'extremum global ? Justifier.
   **Corrigé (1 pt) :** On peut vérifier que si on considère le point $(-2,-2)$ on a $f(2,2) = 6 > f(-2,-2) = -2$. Par conséquent, ce point ne correspond pas à un point de minimum global.

**Exercice 2. (9 points)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le point $(x_0, 0)$.

1. Étudier la continuité de la fonction $f$ en ce point.
   **Corrigé (1 pt) :** Par la condition suffisante de continuité nous avons

$$|f(x_0 + r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - f(x_0, 0)| = \left|(r\sin(\theta))^2 \sin\left(\frac{x_0 + r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\right| \leq r^2.$$

   Alors

$$\lim_{r \to 0} f(x_0 + r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f(x_0, 0).$$

   Nous en déduisons aisément la continuité en $(x_0, 0)$.

2. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent-elles en ce point ?
**Corrigé (1 pt) :** On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h}=0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,k)-f(x_0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}k\sin\left(\frac{x_0}{k}\right)=0,\quad (\text{car } |\sin\left(\tfrac{x_0}{k}\right)|\leq 1).$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au point $(x_0,0)$.

3. La fonction $f$ est-elle différentiable en ce point ?
**Corrigé (1 pt) :** Nous savons que les dérivées partielles existent au point $(x_0,0)$, il nous reste à vérifier si $\varepsilon(h,k)$ tends vers 0 lorsque $(h,k)\to(0,0)$ continument. En effet,

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(x_0+h,0+k)-f(x_0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{k^2\sin\left(\frac{x_0+h}{k}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

On remplace $h$ par $r\cos(\theta)$ et $k$ par $r\sin(\theta)$, on peut vérifier que

$$\lim_{r\to 0}|\varepsilon(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|=\left|\lim_{r\to 0}r(\sin(\theta))^2\sin\left(\frac{x_0+r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\right|\leq\lim_{r\to 0}r=0.$$

On peut donc conclure que $f$ est différentiable au point $(x_0,0)$.

4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $y\neq 0$.
**Corrigé (1 pt) :**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

5. Étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point $(x_0,0)$.
**Corrigé (3 pts) :** Par la condition suffisante de continuité nous avons

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r\cos(\theta),r\sin(\theta))-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right|=\left|r\sin(\theta)\cos\left(\frac{x_0+r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\right|\leq r.$$

Alors

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0).$$

On conclue que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(x_0,0)$.
Pour la dérivée partielle par rapport à $y$, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+r\cos(\theta),r\sin(\theta))-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=2r\sin(\theta)\sin\left(\frac{x_0+r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)-(r\cos(\theta)+x_0)\cos\left(\frac{x_0+r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right).$$

Alors, il y'a deux cas qui se présentent :

(a) Si $x_0=0$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|=\left|2r\sin(\theta)\sin\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)-(r\cos(\theta))\cos\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right|\leq 3r.$$

Ce la montre que $\lim_{r\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, et par conséquent $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point $(0,0)$.

(b) Si $x_0\neq 0$, on peut vérifier que pour $\theta=\frac{\pi}{2}$, on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0+r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),r\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\lim_{r\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,r)=-\lim_{r\to 0}x_0\cos\left(\frac{x_0}{r}\right).$$

Vu que cette limite n'existe pas, on peut conclure que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue au point $(x_0,0)$ lorsque $x_0\neq 0$.

**Corrigé (1 pt) :** On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = 1.$$

6. Commenter ce dernier en utilisant le théorème de Schwarz.
**Corrigé (1 pt) :** Les dérivées partielles secondes croisées ne sont pas égales en $(0,0)$. Cela signifie qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

**Exercice 3. (7 points)** Soit $g$ une fonction dérivable définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. On considère pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs suivant

$$\vec{V} = g(u) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u = x^2 + y^2.$$

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.
**Corrigé (1 pt) :** Il suffit de montrer que $div(\vec{V}) = 0$. En effet.

$$div(\vec{V}) = -2xyg'(u) + 2xyg'(u) + 0 = 0.$$

2. Soient $h$ une primitive de $g$ (à savoir $h'(u) = g(u)$), $R$ une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha$ un réel. On note

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ x \\ R(x,y) \end{pmatrix}$$

Trouver $\alpha$ et $R$ pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$.
**Corrigé (2 pt) :** $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$ équivaut au système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) = -yg(u) = -yh'(u) = -\frac{1}{2}(2y)h'(x^2+y^2) \\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = -xg(u) = -xh'(u) = -\frac{1}{2}(2x)h'(x^2+y^2) \\ 1 - \alpha = 0. \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $R(x,y) = -\frac{1}{2}h(x^2+y^2) + k$.

3. Déterminer $g$ pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
**Corrigé (2 pt) :** On doit trouver la fonction $g$ telle que $\vec{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$. En effet,

$$\vec{rot}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(u) + 2x^2 g'(u) + g(u) + 2y^2 g'(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2g(u) + 2ug'(u) \end{pmatrix}.$$

La troisième composante du vecteur $\vec{rot}(\vec{V})$ s'annule lorsque $g$ est une solution de l'équation différentielle $g'(u) + \frac{1}{u}g(u) = 0$. Par conséquent $g(u) = Ae^{-\ln(u)} = \frac{A}{u}$.

4. On suppose que $\vec{V}$, dérive d'un potentiel scalaire. Déterminer le potentiel.
**Corrigé (2 pt) :** Dans cette partie On considère le cas $g(u) = \frac{A}{u} = \frac{A}{x^2+y^2}$ et on cherche la fonction $f(x,y,z)$ telle que $\vec{grad}(f) = \vec{V}$. On utilise l'égalité de la première composante, on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{Ay}{y^2+x^2} \Rightarrow f(x,y,z) = -A \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + k(y,z).$$

On remplace t $f$ dans l'égalité des deuxièmes composantes on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{Ax}{y^2+x^2} \Longleftrightarrow \frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = 0,$$

ainsi, on a $f(x,y,z) = -A\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(z)$. Finalement, l'égalité des troisièmes composantes donne que $c'(z) = 0$, et donc que $c(z) = B$. Ainsi le potentiel scalaire est donné par

$$f(x,y,z) = -A\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + B = A\arctan\left(-\frac{x}{y}\right) + B.$$

**Indication** : On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\int \frac{a}{a^2+t^2}dt = \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + K \quad \text{et} \quad \arctan(-t) = -\arctan(t).$$