Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2021 - Final
Durée : 1h30.
Indiquer clairement le numéro de votre groupe
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (7 points)

1. On définit le domaine suivant :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \right\}.$$

   (a) Faire une figure représentant le domaine D.

   (b) Soient

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \right\}$$

   et

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \right\}.$$

   En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer l'aire de D_1 et l'aire de D_2. En déduire l'aire de D.

2. On note $\mathcal{C}$ le bord de D.

   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.

   (b) Retrouver l'aire de D en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Exercice 2. (13 points)

1. On considère le volume :

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 < z < 1,\ y > 0 \right\}.$$

   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

   (b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$, en utilisant la méthode de bâtons.

2. Soit Σ la surface définie par :

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 = z,\ z < 1,\ y > 0 \right\}.$$

   (a) Donner une paramétrisation de Σ en coordonnées cylindriques.

   (b) Calculer l'aire de Σ.

   (c) On suppose que la masse surfacique de Σ est $\mu(x, y, z) = \sqrt{4z + 1}$. Calculer le moment d'inertie de Σ par rapport à $\vec{oz}$.

   (d) On oriente Σ par la normale unitaire dont la troisième composante est positive. Calculer le flux de $\vec{V} = (y, -x, 1)$ à travers la surface Σ.

3. On considère le champ de vecteurs suivant :

$$\vec{U} = (2y + z, 2x + z, y + x).$$

   (a) Montrer que le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire.

   (b) Soit Γ le bord de la surface Σ. Paramétrer la courbe Γ.

   (c) Calculer de deux façons différentes la circulation $\vec{U}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).

Tournez la page S.V.P

Rappel

1. L'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$: Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$, alors l'aire de D est

$$\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy.$$

2. Volume d'un domaine de $\mathbb{R}^3$: Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, alors le volume de $\mathcal{V}$ vaut

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz.$$

3. L'aire d'une surface et moment d'inertie :
   (a) Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$, alors l'aire de Σ vaut

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_{\Sigma} d\sigma.$$

   (b) Si la masse surfacique de Σ est $\mu(x, y, z)$ alors le moment d'inertie de Σ par rapport à l'axe $\vec{oz}$ est

$$\mathcal{M}_{\vec{oz}}(\Sigma) = \int\int_{\Sigma} [d(\vec{oz}, (x, y, z))]^2 \mu(x, y, z) d\sigma,$$

   où $d(\vec{oz}, (x, y, z))$ est la distance entre un point $(x, y, z) \in \Sigma$ et $\vec{oz}$.

4. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$