Final MT22 - A2019

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \leq 4 - x^2 \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 3\}.$$

1. (a) Faire une figure.

(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(c) Soient a et b deux nombres réels. Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_D (ax+b)\,dxdy = \frac{28b}{3}.$$

2. Soit $D_2 = D \backslash D_1$ où $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \ , \ y \geq 0\}$.

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(b) Calculer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq z \leq x+3, \ \text{et } (x,y) \in D_2\}.$$

(Indication : utiliser le résultat de la question **1.***(c) pour des valeurs de a ou b particulières.)*

3. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

(b) Calculer directement l'intégrale curviligne $\int_\Gamma x^2\,dy$.

(c) Retrouver ce résultat à l'aide d'un théorème du cours à préciser.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Soient $A(2,0,1)$ et $B(0,\sqrt{3},1)$ deux points dans l'espace.

1. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(2z-1) \\ y(2z-1) \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une fonction f telle que $\vec{V} = \nabla f$.

(b) Sans calcul intégral, en déduire le travail de $\vec{V}$ le long du chemin rectiligne orienté $\overrightarrow{AB}$.

2. On considère la surface plane S délimitée par le triangle fermé (OAB) (où O est l'origine du repère de l'espace).

(a) On oriente S par le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ faisant un angle aigu avec (Ox). Indiquer sur une figure le sens de circulation associé sur le contour du triangle OAB.

(b) Paramétrer le contour du triangle OAB.

(c) Soit $\vec{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Déterminer le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{U}$ à travers S, par la méthode de votre choix.

Exercice 3 (Barème approximatif : 7 points)

On considère la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (y+1)^2 = (x-2)^2 + z^2 \; , \; z \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

1. (a) Faire une figure en perspective.

(b) Paramétrer Σ en coordonnées cylindriques.

(c) Calculer l'aire de Σ.

(d) Calculer directement le flux de $\vec{W}(-x, y+1, -z)$ à travers Σ. On orientera le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ vers le haut.

2. On considère maintenant le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (x-2)^2 + z^2 \leq (y+1)^2 \; , \; z \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

(a) Transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

3. On note $\mathcal{S}$ le bord du volume $\mathcal{V}$, orienté par le champ des normales unitaires extérieures. Déterminer le flux de $\vec{W}$ à travers $\mathcal{S}$, par la méthode de votre choix.