Nom :   Prénom :

Final MT22 - A2020

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

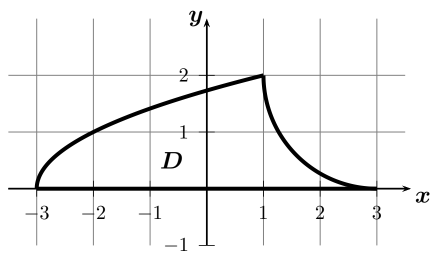
Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 4, \; y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq 3 + x\},$$

et représenté graphiquement ci-dessous



1. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

(b) À l'aide d'une intégrale curviligne, montrer que l'aire de D est égal à

$$Aire(D) = \tfrac{28}{3} - \pi.$$

2. (a) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

(b) Avec l'une des formules précédentes, montrer que $\iint_D (y-2)\, dxdy = -8$.

(c) Déterminer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 0 \leq z \leq y+1, \text{ et } (x,y) \in D\}.$$

*(Indication : utiliser les résultats des questions **1.**(b) et **2.**(b).)*

3. Soit $D_2 = D_1 \backslash D$ où $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leq y \leq 2 \text{ et } y^2 - 3 \leq x \leq 3\}$.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_2 sur la figure ci-dessus.

(b) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(c) Retrouver le volume du domaine $\mathcal{V}$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 4 points)

Soient $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$ et $C(0,1,1)$ trois points dans l'espace.
On considère les courbes suivantes :
$\Gamma_1 :=$ le segment $[AC]$,
$\Gamma_2 :=$ le segment $[BC]$,
$\Gamma_3 :=$ la courbe définie par les équations cartésiennes $x = 2$ et $(y-1)^2 + 4z^2 = 1$ et $z \geq 0$.

1. Faire une figure en perspective en y représentant les 3 chemins ci-dessus.

2. Paramétrer la courbe $\mathscr{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et indiquer le sens de parcours choisi sur la figure.

3. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ -z^2 \end{pmatrix}$.

A l'aide de la paramétrisation de $\mathscr{C}$, calculer l'intégrale curviligne $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$.

(Indication : il faut trouver $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \pm\frac{8}{3}$.)

4. Sans calcul, en déduire si le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ou non.

Exercice 3 (Barème approximatif : 6 points)

On considère le volume $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \sqrt{2x^2 + 2y^2} \leq z \leq \sqrt{1 + x^2 + y^2}\}.$$

1. (a) Déterminer la projection D du volume $\mathcal{V}$ dans le plan $z = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oz), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

(c) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

2. On considère la surface définie par $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z^2 = 2x^2 + 2y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq \sqrt{2}\}$.

(a) Paramétrer la surface S.

(b) Exprimer l'intégrale surfacique $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en coordonnées polaires.

(c) Calculer l'intégrale de surface $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma$.