

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.

La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

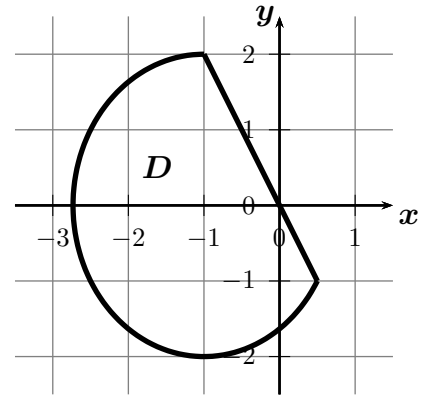
Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 12 points)

Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par

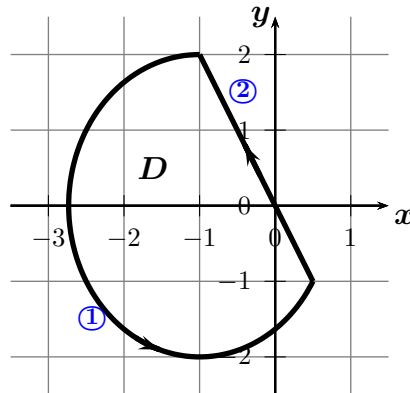
$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ et } 2x + y \leq 0 \right\},$$

et représenté graphiquement ci-contre



1. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ .



Correction :

$$M \in \textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{11\pi}{6}.$$

$$M \in \textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t : \frac{1}{2} \rightarrow -1.$$

$$\text{ou bien } M \in \textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ 3t - 1 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \rightarrow 1.$$

(b) Montrer que

$$\int_{\Gamma} ydx - xdy = -3 - \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Correction :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} ydx - xdy &= \int_{\frac{1}{2}}^{-1} -2t \times 1dt - t \times (-2)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} 2 \sin \theta \times (-\sqrt{3} \sin \theta) d\theta - (-1 + \sqrt{3} \cos \theta) \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} 0dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} (2 \cos \theta - 2\sqrt{3})d\theta \\ &= \left[2 \sin \theta - 2\sqrt{3}\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} = -1 - 2\sqrt{3} \times \frac{11\pi}{6} - (2 - \sqrt{3}\pi) = -3 - \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

ou bien

$$\int_{\textcircled{2}} ydx - xdy = \int_0^1 \underbrace{(3t - 1) \times \left(-\frac{3}{2}\right)dt - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) \times 3dt}_{=0} = 0$$

(c) À l'aide d'un théorème intégral à préciser, en déduire l'aire de D , noté $Aire(D)$.

Correction : La courbe \mathcal{C} est fermée, sans point double et parcourue dans le sens trigonométrique. Par conséquent, si D est le domaine de \mathbb{R}^2 délimité par la courbe \mathcal{C} alors

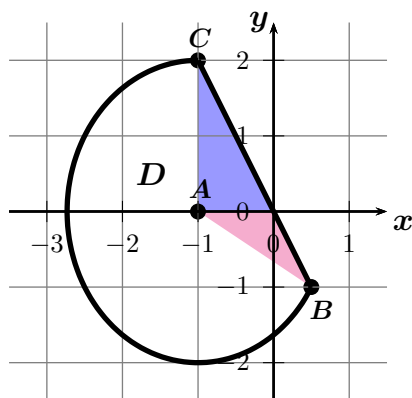
$$\int_{\Gamma} ydx - xdy = \iint_D \left(\frac{\partial[-x]}{\partial x} - \frac{\partial[y]}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D -2dxdy = -2 \times Aire(D).$$

$$D'où Aire(D) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} ydx - xdy = \frac{3}{2} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$$

2. Soit $A(-1, 0)$, $B(\frac{1}{2}, -1)$ et $C(-1, 2)$ trois points du plan. On note D_1 le domaine délimité par le triangle ABC .

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_1 sur la figure ci-dessus.

Correction :



(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x, y) dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y .
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

Correction : • **Méthode 1** : bâtons // (Oy)

Pour encadrer y , nous n'avons pas besoin de découper le domaine D_1 . Nous avons besoin des équations des droites (AB) : $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ et (BC) : $y = -2x$. On obtient

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}^{-2x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

• **Méthode 2** : bâtons // (Ox)

Pour encadrer x , il faut découper le domaine D_1 en $y = 0$. Nous avons besoin des équations des droites (AB) : $x = -\frac{3}{2}y - 1$, (AC) : $x = -1$ et (BC) : $x = -\frac{1}{2}y$. On obtient

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy &= \iint_{OAB} f(x, y) \, dx dy + \iint_{AOC} f(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-\frac{3}{2}y - 1}^{-\frac{y}{2}} f(x, y) \, dx \right) dy + \int_0^2 \left(\int_{-1}^{-\frac{y}{2}} f(x, y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

3. Soit $D_2 = D \setminus D_1$ où le domaine D_1 est défini à la question 2.

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} f(1 + \sqrt{3}r \cos \theta, 2r \sin \theta) \times 2\sqrt{3}r \, d\theta \right) dr$$

(b) Montrer que le volume de $\mathcal{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - 2x\}$ est égal à $\text{Vol}(\mathcal{V}) = 9 + 4\pi\sqrt{3}$.

(Indication : exprimer le volume à l'aide d'une intégrale double sur D .)

Correction :

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathcal{V}) &= \iint_D (1 - 2x) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} (1 - 2x) dx dy + \iint_{D_2} (1 - 2x) dx dy \\
 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}^{-2x} (1 - 2x) dy \right) dx + 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} r(3 - 2\sqrt{3}r \cos \theta) d\theta \right) dr \\
 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x \right) dx + 2\sqrt{3} \int_0^1 \left[3r\theta - 2\sqrt{3}r^2 \sin \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} dr \\
 &= \frac{2}{3} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)^2 dx + 2\sqrt{3} \int_0^1 (4\pi r + 3\sqrt{3}r^2) dr \\
 &= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{6}(1 - 2x)^3 \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{3} \left[2\pi r^2 + \sqrt{3}r^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times 27 + 4\pi\sqrt{3} + 6 = 9 + 4\pi\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 8 points)

Choisir entre « **parties I et II** » ou « **parties I et III** »

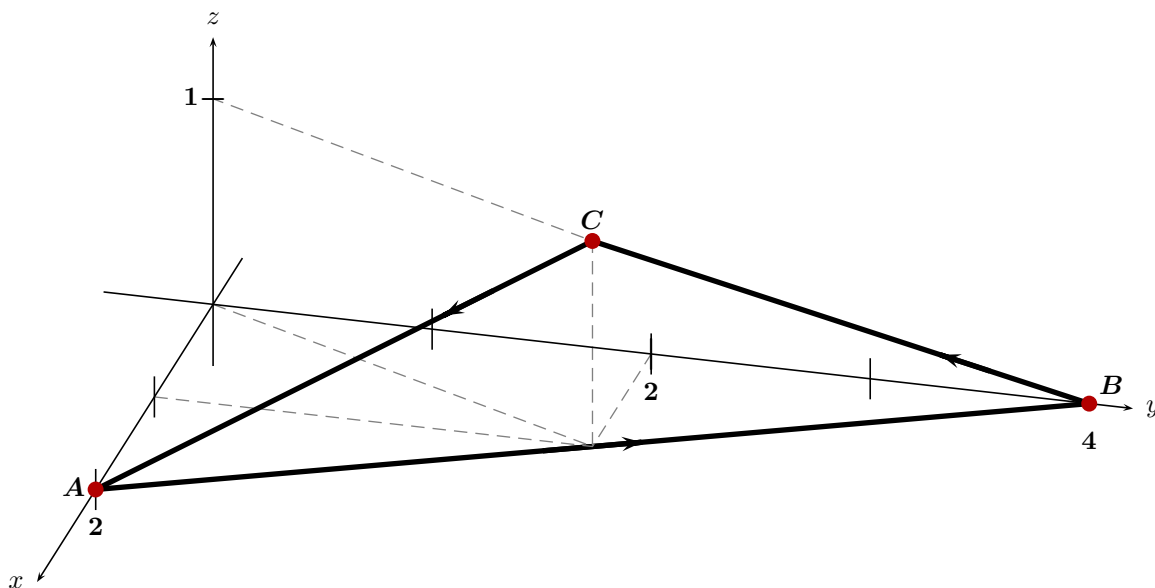
Partie I (Barème approximatif : 4 points)

Soient $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ et $C(1, 2, 1)$ trois points dans l'espace.

On considère la surface plane Σ délimitée par le triangle fermé ABC .

1. Faire une figure.

Correction :



2. On oriente Σ par le champ des normales unitaires \vec{n} faisant un angle aigu avec (Oy) . Indiquer sur une figure le sens de circulation associé sur le contour du triangle ABC .

Correction : Avec la règle de la main droite, on obtient le sens de circulation indiqué sur le schéma précédent.

3. On note \mathcal{C} le bord de Σ . Paramétrer le courbe \mathcal{C} .

Correction :

$$M \in [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 4t \\ 0 \end{pmatrix}, t: 0 \rightarrow 1 \quad \text{ou bien} \quad M \in [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, t: 0 \rightarrow 2$$

$$M \in [\overrightarrow{BC}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 4-2t \\ t \end{pmatrix}, t: 0 \rightarrow 1$$

$$M \in [\overrightarrow{CA}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 1-t \end{pmatrix}, t: 0 \rightarrow 1$$

4. Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(x, y, z) = (z, 0, 2x)$ le long de \mathcal{C} que l'on notera $\mathcal{T}(\vec{V})$.

Correction :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z dx + 2x dz &= \underbrace{\int_{\overrightarrow{AB}} z dx + 2x dz}_{=0} + \int_{\overrightarrow{BC}} z dx + 2x dz + \int_{\overrightarrow{CA}} z dx + 2x dz \\ &= \int_0^1 t \times 1 dt + 2t \times 1 dt + \int_0^1 (1-t) \times 1 dt + 2(1+t) \times (-1) dt \\ &= \int_0^1 3t dt + \int_0^1 (-1-3t) dt = \boxed{-1} \end{aligned}$$

Partie II (Barème approximatif : 4 points)

On admet que la surface Σ peut-être définie par

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y = 4, z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2 - z\}.$$

1. Paramétrer la surface Σ à l'aide des variables cartésiennes (x, z) .

Correction :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4-2x \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{où } (x, z) \in D := \{(x, z) ; 0 \leq z \leq 1 \text{ et } z \leq x \leq 2-z\}.$$

2. Déterminer les composantes du vecteur normal unitaire \vec{n} selon l'orientation imposée à la question **I-2**.

Correction : Tout d'abord

$$\vec{N} = \pm \vec{t}_x \times \vec{t}_z = \pm \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'orientation imposée à la question **I.2**), on choisit $\vec{N} = -\vec{t}_x \times \vec{t}_z = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on trouve

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le flux du champs de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ à travers Σ à l'aide d'une intégrale surfacique.
Correction :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Flux}_{\Sigma}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = \int_D \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \vec{N} dx dz = -\text{Aire}(D) = -1.$$

4. À l'aide d'un théorème intégral à préciser, justifier que $\text{Aire}(\Sigma) = -\sqrt{5} \times \mathcal{T}(\vec{V})$, sans calcul ou presque.

Correction : Puisque le sens de parcours de \mathcal{C} est cohérent avec l'orientation du champ des normales unitaires à Σ selon la règle de la main droite, il y a égalité entre le calcul de la circulation de \vec{V} et le calcul du flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ d'après le théorème de Stokes Ampère.

La définition initiale du Flux est

$$\text{Flux}_{\Sigma}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} -\frac{1}{\sqrt{5}} d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{Aire}(\Sigma).$$

D'où l'égalité, $\text{Aire}(\Sigma) = -\sqrt{5} \times \text{Flux}_{\Sigma}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = -\sqrt{5} \times \mathcal{T}(\vec{V})$.

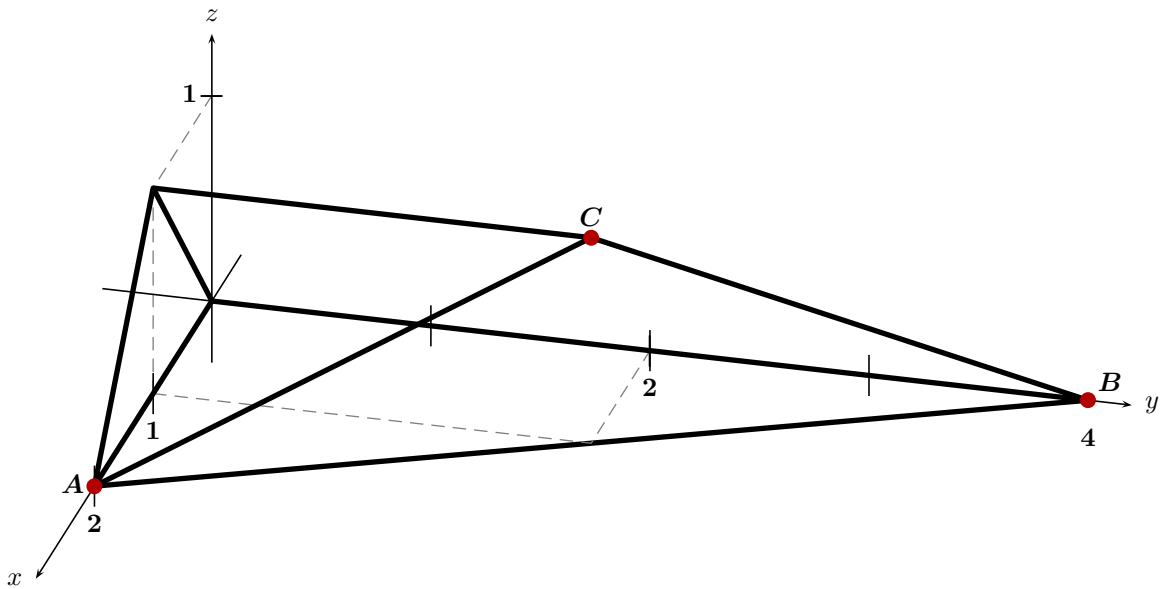
Partie III (Barème approximatif : 4 points)

On considère le volume \mathcal{V} de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y \leq 4, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2 - z\}.$$

1. Représenter ce volume sur la figure précédente.

Correction : Il suffit de projeter la surface Σ orthogonalement sur le plan d'équation $y = 0$:



2. À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oy) , transformer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{4-2x} f(x, y, z) dy \right) dx dz = \int_0^1 \left(\int_z^{2-2z} \left(\int_0^{4-2x} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz$$

3. Calculer le volume de \mathcal{V} .

Correction :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{V}) &= \iiint_{\mathcal{V}} 1 dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_z^{2-2z} (4-2x) dx \right) dz \\ &= \int_0^1 \left[4x - x^2 \right]_z^{2-2z} dz \\ &= \int_0^1 (4 - 4z) dz = \left[4z - 2z^2 \right]_0^1 = \boxed{2}. \end{aligned}$$

4. On note S le bord de \mathcal{V} . Déterminer le flux de $\vec{U}(x, y, z) = (y(2x+z), (1-y)^2, -z)$ à travers S par la méthode de votre choix.

Correction : Utiliser le théorème de Gauss-Ostrogradski. Avec le champ des normales unitaires dirigées vers l'extérieur, on a

$$\text{Flux}_S(\vec{U}) = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{U}(x, y, z) dx dy dz.$$

On a $\operatorname{div} \vec{U}(x, y, z) = 2y - 2(1 - y) - 1 = -3 + 4y$.

$$\begin{aligned} Flux_S(\vec{U}) &= \iiint_{\mathcal{V}} (-3 + 4y) dx dy dz = -3 \operatorname{Vol}(\mathcal{V}) + 4 \iiint_{\mathcal{V}} y dx dy dz \\ &= -6 + 4 \int_0^1 \left(\int_z^{2-2z} \frac{(4-2x)^2}{2} dx \right) dz \\ &= -6 + 8 \int_0^1 \left(\int_z^{2-2z} (2-x)^2 dx \right) dz \\ &= -6 + 8 \int_0^1 \left[-\frac{(2-x)^3}{3} \right]_z^{2-2z} dz \\ &= -6 + \frac{8}{3} \int_0^1 (-z^3 + (2-z)^3) dz \\ &= -6 + \frac{2}{3} \left[-z^4 - (2-z)^4 \right]_0^1 \\ &= -6 + \frac{2}{3} \times (-1 - 1 + 16) = \boxed{\frac{10}{3}}. \end{aligned}$$