Nom : Prénom :

Final MT22 - A2021

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

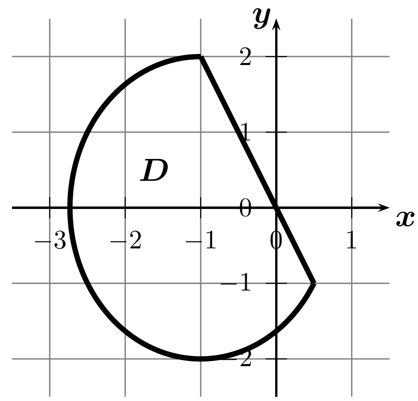
Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (45min-Barème approximatif : 12 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ et } 2x+y \leq 0 \right\},$$

et représenté graphiquement ci-contre



1. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

(b) Montrer que

$$\int_\Gamma y dx - x dy = -3 - \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.$$

(c) À l'aide d'un théorème intégral à préciser, en déduire l'aire de D, noté $Aire(D)$.

2. Soit $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},-1)$ et $C(-1,2)$ trois points du plan. On note D_1 le domaine délimité par le triangle ABC.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_1 sur la figure ci-dessus.

(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

3. Soit $D_2 = D \backslash D_1$ où le domaine D_1 est défini à la question **2.**

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(b) Montrer que le volume de $\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq 1-2x\}$ est égal à $Vol(\mathcal{V}) = 9 + 4\pi\sqrt{3}$.
(Indication : exprimer le volume à l'aide d'une intégrale double sur D.)

Exercice 2 (45min-Barème approximatif : 8 points)

Choisir entre « **parties I et II** » ou « **parties I et III** »

Partie I (Barème approximatif : 4 points)

Soient $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(1,2,1)$ trois points dans l'espace.

On considère la surface plane Σ délimitée par le triangle fermé ABC.

1. Faire une figure.
2. On oriente Σ par le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ faisant un angle aigu avec (Oy). Indiquer sur une figure le sens de circulation associé sur le contour du triangle ABC.
3. On note $\mathscr{C}$ le bord de Σ. Paramétrer le courbe $\mathscr{C}$.
4. Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = (z,0,2x)$ le long de $\mathscr{C}$ que l'on notera $\mathcal{T}(\vec{V})$.

Partie II (Barème approximatif : 4 points)

On admet que la surface Σ peut-être définie par

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + y = 4, \ z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2 - z\}.$$

1. Paramétrer la surface Σ à l'aide des variables cartésiennes (x,z).
2. Déterminer les composantes du vecteur normal unitaire $\vec{\boldsymbol{n}}$ selon l'orientation imposée à la question **I-2.**
3. Calculer le flux du champs de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$ à travers Σ à l'aide d'une intégrale surfacique.
4. À l'aide d'un théorème intégral à préciser, justifier que $Aire(\Sigma) = -\sqrt{5} \times \mathcal{T}(\vec{V})$, sans calcul ou presque.

Partie III (Barème approximatif : 4 points)

On considère le volume $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + y \leq 4, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2 - z\}.$$

1. Représenter ce volume sur la figure précédente
2. À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oy), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.
3. Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
4. On note S le bord de $\mathcal{V}$. Déterminer le flux de $\vec{U}(x,y,z) = (y(2x+z), (1-y)^2, -z)$ à travers S par la méthode de votre choix.