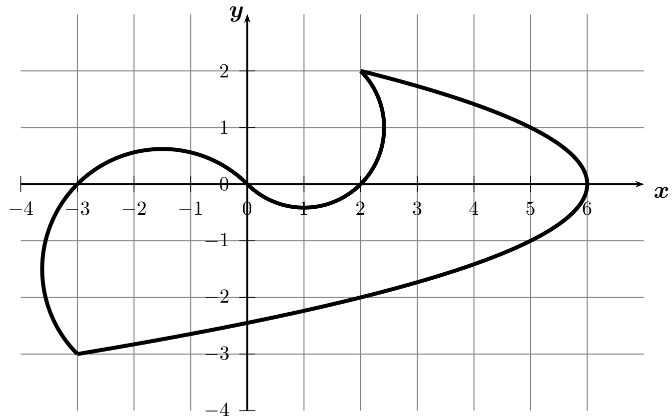
Corrigé du Final MT22

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

On définit les différentes parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$D_1 :=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x < 6 - y^2 \text{ et } y < x\}$,
$D_2 :=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 - 2x + y^2 - 2y \leq 0 \text{ et } y \leq x\}$,
$D_3 :=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + 3x + y^2 + 3y < 0 \text{ et } y \geq x\}$.

Le domain $D = (D_1 \backslash D_2) \cup D_3$ est représenté ci-contre.



1. Cette question ne concerne que le domaine D_1.

(a) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

Correction :

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_{-3}^{2}\left(\int_{y}^{6-y^2} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-3}^{2}\left(\int_{-\sqrt{6-x}}^{x} f(x,y)dy\right)dx + \int_{2}^{6}\left(\int_{-\sqrt{6-x}}^{\sqrt{6-x}} f(x,y)dy\right)dx.$$

(b) Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_{D_1} (2y+1)\, dxdy = 0.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} (2y+1)dxdy &= \int_{-3}^{2}\left(\int_{y}^{6-y^2} (2y+1)dx\right)dy \\
&= \int_{-3}^{2} (2y+1)(6-y^2-y)dy \\
&= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - 3y^2 + 11y + 6)dy \\
&= \Big[-\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{11y^2}{2} + 6y\Big]_{-3}^{2} \\
&= (-8 - 8 + 22 + 12) - (-\frac{81}{2} + 27 + \frac{99}{2} - 18) = 0.
\end{aligned}$$

2. (a) Montrer que D_2 et D_3 sont des demi-disques dont on précisera les caractéristiques (centre et rayon).

Correction : Mettre les expressions algébriques sous forme canonique :

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \text{ et } y \leq x\}.$$

L'inéquation $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ désigne un disque de centre $(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. La section $y = x$ passe par le centre du disque donc D_2 est un demi-disque.

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x+\tfrac{3}{2})^2 + (y+\tfrac{3}{2})^2 < \tfrac{9}{2} \text{ et } y \geq x\}.$$

L'inéquation $(x+\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 \leq \frac{9}{2}$ désigne un disque de centre $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$. La section $y = x$ passe par le centre du disque donc D_3 est un demi-disque.

(b) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer les intégrales doubles $\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$ et $\iint_{D_3} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(1+r\cos\theta, 1+r\sin\theta) \times r\, d\theta \right) dr,$$

$$\iint_{D_3} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(-\tfrac{3}{2}+r\cos\theta, -\tfrac{3}{2}+r\sin\theta) \times r\, d\theta \right) dr,$$

(c) En déduire que

$$I_1 = \iint_D (2y+1)\, dxdy = -\frac{15\pi}{2} + \frac{35}{3}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \underbrace{\iint_{D_1} (2y+1)\, dxdy}_{=0} - \iint_{D_2} (2y+1)\, dxdy + \iint_{D_3} (2y+1)\, dxdy \\
&= -\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(3+2r\sin\theta)\, d\theta \right) dr + \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r(-2+2r\sin\theta)\, d\theta \right) dr \\
&= -\int_0^{\sqrt{2}} \Big[r(3\theta - 2r\cos\theta \Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dr + \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \Big[r(-2\theta - 2r\cos\theta)\, d\theta \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dr \\
&= -\int_0^{\sqrt{2}} (3\pi r - 2r^2\sqrt{2}) dr + \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} (-2\pi r + 2r^2\sqrt{2}) dr \\
&= -\Big[\frac{3\pi r^2}{2} - 2\sqrt{2}\frac{r^3}{3} \Big]_0^{\sqrt{2}} + \Big[-\pi r^2 + 2\sqrt{2}\frac{r^3}{3} \Big]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = -(3\pi - \tfrac{8}{3}) + (-\tfrac{9}{2}\pi + 9) = -\frac{15\pi}{2} + \frac{35}{3}.
\end{aligned}$$

3. Soit $\mathscr{C}$ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

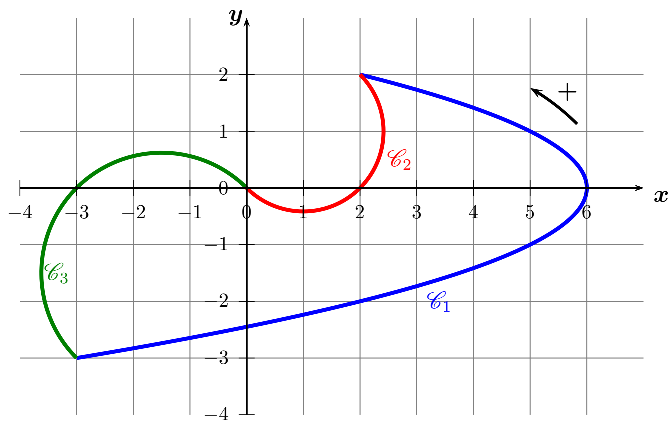
(a) Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$.

Correction : On a $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3$ où

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_1 \Leftrightarrow \exists t : -3 \to 2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-t^2 \\ t \end{pmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \exists \theta : \tfrac{\pi}{4} \to -\tfrac{3\pi}{4},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\cos\theta \\ 1+\sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_3 \Leftrightarrow \exists \theta : \tfrac{\pi}{4} \to \tfrac{5\pi}{4},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{pmatrix}.$$



(b) Calculer, à l'aide de la définition, la valeur de $I_2 = \displaystyle\int_{\mathscr{C}} (x-y)\,dy$.

Correction :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathscr{C}_1} (x-y)dy + \int_{\mathscr{C}_2} (x-y)dy + \int_{\mathscr{C}_3} (x-y)dy \\
&= \int_{-3}^{2} (6-t^2-t)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4}} 2(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{9}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta\, d\theta \\
&= \left[6t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{2} + \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} + \cos^2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4}} + \left[\frac{9\theta}{4} + \frac{9\sin(2\theta)}{8} + \frac{9}{4}\cos^2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= (12 - \frac{8}{3} - 2) - (-18 + 9 - \tfrac{9}{2}) + (-\pi) + (\tfrac{9\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4} + 20 + \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

(c) À l'aide d'un théorème intégral, déduire des questions **2c)** et **3b)** que la circulation du champ de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x+1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathscr{C}$ est égale à $I_3 = 10(\pi+3)$.

Correction : On applique le théorème de Green-Riemann

$$I_3 = \int_{\mathscr{C}} y^2dx + (x+1)dy = \iint_D (1-2y)dxdy \text{ et } \int_{\mathscr{C}} (x-y)dy = \iint_D 1\,dxdy$$

Donc

$$I_3 = 2 \times I_2 - I_1 = 2\left(\frac{5\pi}{4} + 20 + \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{15\pi}{2} + \frac{35}{3}.\right) = 10\pi + 30$$

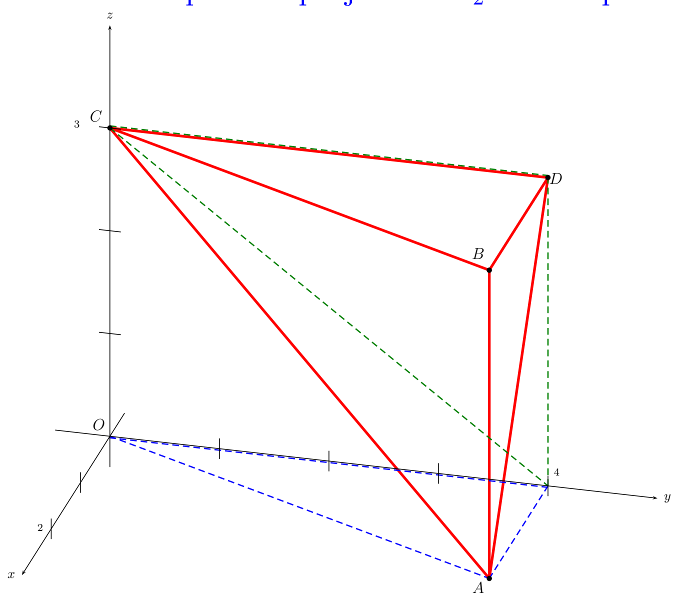
Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Soient $A(2,4,0)$, $B(2,4,3)$, $C(0,0,3)$ et $D(0,4,3)$ quatres points dans l'espace.
On considère le tétraèdre défini par :

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x \leq y \leq 4, \ 3x + 2z \geq 6 \ \text{ et } z \leq 3\}.$$

1. Faire une figure en perspective du tetraèdre Ω.

Correction : Le tétraèdre est représenté en rouge ci-dessous.
Les pointillés en bleu indiquent la projection D_1 dans le plan $z = 0$.
Les pointillés en vert indiquent la projection D_2 dans le plan $x = 0$.



2. (a) Déterminer la projection D_1 du tetraèdre Ω dans le plan $z = 0$.

Correction : L'encadrement des bâtons parallèment à (Oz) : $3 - \frac{3x}{2} \leq z \leq 3$ entraîne $x \geq 0$.

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; 2x \leq y \leq 4 \text{ et } x \geq 0\}$$

A l'aide d'une figure dans le plan (xOy) on obtient

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 2x \leq y \leq 4\}.$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oz), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_1}\left(\int_{3-\frac{3x}{2}}^{3} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$
$$= \int_0^2\left(\int_{2x}^{4}\left(\int_{3-\frac{3x}{2}}^{3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

3. (a) Déterminer la projection D_2 du tetraèdre Ω dans le plan $x=0$.

Correction : L'encadrement des bâtons parallèment à (Ox) : $2-\frac{2z}{3} \le x \le \frac{y}{2}$ entraîne $2-\frac{2z}{3} \le \frac{y}{2}$.

$$D_2 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ y \le 4,\ z \le 3 \text{ et } 4-\tfrac{4z}{3} \le y\}$$

A l'aide d'une figure dans le plan (yOz) on obtient

$$D_2 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2\ ; 0 \le z \le 3 \text{ et } 4-\tfrac{4z}{3} \le y \le 4\}.$$

ou bien

$$D_2 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2\ ; 0 \le y \le 4 \text{ et } 3-\tfrac{3y}{4} \le z \le 3\}.$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_2}\left(\int_{2-\frac{2z}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y,z)\,dx\right)dydz$$
$$= \int_0^3\left(\int_{4-\frac{4z}{3}}^{4}\left(\int_{2-\frac{2z}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz.$$

ou bien

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_2}\left(\int_{2-\frac{2z}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y,z)\,dx\right)dydz$$
$$= \int_0^4\left(\int_{3-\frac{3z}{4}}^{3}\left(\int_{2-\frac{2z}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y,z)\,dx\right)dz\right)dy.$$

4. Calculer le volume du tétraèdre Ω.

Correction : Utiliser la formule obtenue à la question **2b)**.

$$
\begin{aligned}
V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\, dxdydz &= \iint_{D_1} \left(\int_{3-\frac{3x}{2}}^{3} 1\, dz \right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left(\int_{2x}^{4} \frac{3x}{2} dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{3xy}{2} \right]_{2x}^{4} dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = \left[3x^2 - x^3 \right]_0^2 = 12 - 8 = \boxed{4}.
\end{aligned}
$$

5. Montrer que l'ordonnée du centre de gravité de Ω est $y_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} y\, dxdydz = 3$.

Correction :

$$
\begin{aligned}
y_G = \frac{1}{4} \iiint_{\Omega} y\, dxdydz &= \frac{1}{4} \iint_{D_1} \left(\int_{3-\frac{3x}{2}}^{3} y\, dz \right) dxdy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\int_{2x}^{4} \frac{3xy}{2} dy \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 \left[\frac{3xy^2}{4} \right]_{2x}^{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (12x - 3x^3) dx = \frac{1}{4} \left[6x^2 - \frac{3x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{24-12}{4} = \boxed{3}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)

Soient S_1 et S_2 les deux surfaces définies par les équations implicites suivantes :

$$S_1 : \ -2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad S_2 : \ x + z = 1.$$

On considère la courbe $\mathscr{C} = S_1 \cap S_2$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est également l'intersection d'un plan avec un cylindre d'axe parallèle à (Oz).

   Correction :

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} z = (1-x) \quad (plan) \\ (x+1)^2 + 2y^2 = 1 \quad (cylindre) \end{cases}$$

2. Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$.

   Correction :

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \\ 2 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Calculer la circulation de $\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathscr{C}$ orientée selon le sens croissant du paramètre choisi.

Correction :

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} ydx + dy + dz = \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \sin\theta)d\theta$$
$$= \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \cos\theta\Big]_0^{2\pi} = \boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

4. On considère la surface $\Sigma := \{(x,y,z)\in S_1\ ;\ x+z\leq 1 \text{ et } z\geq 0\}$.
   (a) Paramétrer la surface Σ à l'aide des variables x et y.
   Correction :

$$M\in\Sigma \Leftrightarrow \exists(x,y)\in D,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ \sqrt{1+2x^2+2y^2}\end{pmatrix} \text{ où } D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; (x+1)^2+2y^2\leq 1.\}$$

   (b) A l'aide de la paramétrisation, déterminer le champ des normales à Σ faisant un angle obtu avec le demi-axe positif $[Oz)$.
   Correction :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\end{pmatrix},\ \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{2y}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x\wedge\vec{t}_y = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\\ -\frac{2y}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\\ 1\end{pmatrix}$$

   La condition « *le champ des normales réalise un angle obtu avec [Oz)* » signifie que la troisième composante du champ des normales doit avoir sa troisième composante négative. On choisit donc

$$\vec{N} = -\vec{t}_x\wedge\vec{t}_y = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\\ \frac{2y}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\\ -1\end{pmatrix}$$

   (c) Calculer le flux du champs de vecteur $\vec{U} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ à travers Σ.

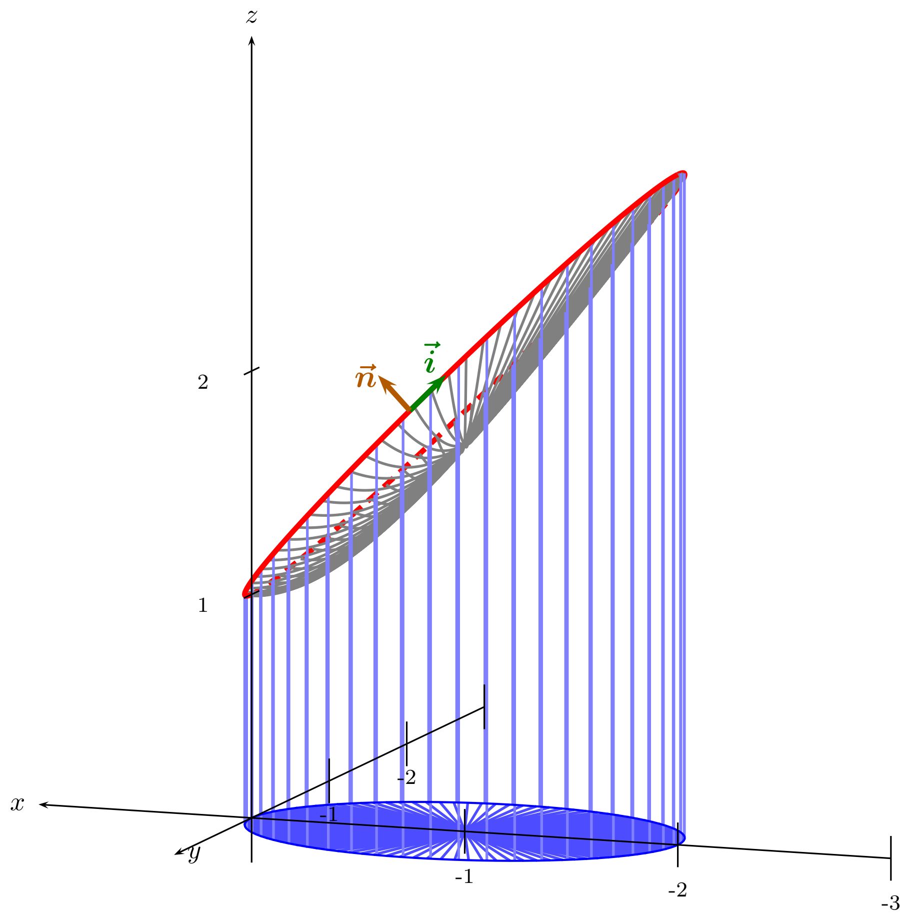
   Correction : On a $\vec{U}\cdot\vec{N} = -1$, donc

$$\iint_\Sigma \vec{U}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_D \vec{U}\cdot\vec{N}dxdy = \iint_D (-1)dxdy = -Aire(D) = -1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\pi = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. À l'aide d'un théorème intégral et d'une figure, commenter l'égalité des résultats obtenus aux questions **3.** et **4c.**
   Correction : On remarque que $\vec{U} = -\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$. Selon la règle de la main droite, l'orientation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le sens croissant de $\theta : 0\to 2\pi$, correspond à un champ des normales unitaires dirigé « vers le haut » . Ce qui explique l'égalité

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot d\vec{\ell} = \iint_\Sigma (-\vec{U})\cdot(-\vec{n})\,d\sigma$$

   Il y a deux changements de signe qui se compensent.


z
x
y
2
1
-1
-2
-1
-2
-3
$\vec{n}$
$\vec{i}$