Nom : Prénom :

Final MT22 - A2022
Durée : 2h

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

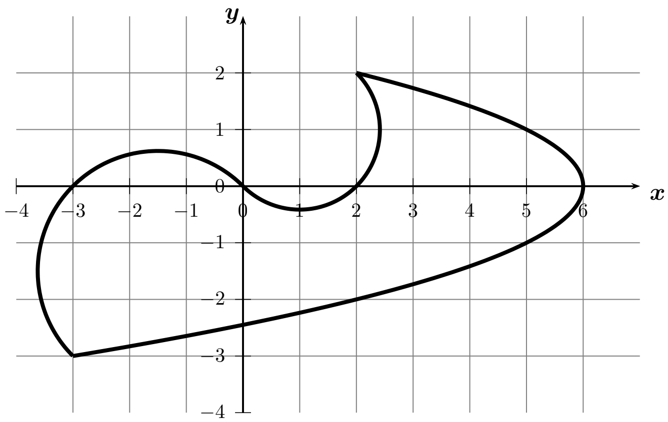
Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points - 50min)

On définit les différentes parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x < 6 - y^2 \text{ et } y < x\}$,
$D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2 - 2x + y^2 - 2y \leq 0 \text{ et } y \leq x\}$,
$D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2 + 3x + y^2 + 3y < 0 \text{ et } y \geq x\}$.

Le domain $D = (D_1 \backslash D_2) \cup D_3$ est représenté ci-contre.



1. Cette question ne concerne que le domaine D_1.

(a) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de <u>deux façons</u> différentes l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

(b) Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_{D_1} (2y + 1)\, dxdy = 0.$$

2. (a) Montrer que D_2 et D_3 sont des demi-disques dont on précisera les caractéristiques (centre et rayon).

(b) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer les intégrales doubles $\displaystyle\iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy$ et $\displaystyle\iint_{D_3} f(x, y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(c) En déduire que $\displaystyle I_1 = \iint_{D} (2y + 1)\, dxdy = -\frac{15\pi}{2} + \frac{35}{3}$.

3. Soit $\mathscr{C}$ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$.

(b) Calculer, à l'aide de la définition, la valeur de $\displaystyle I_2 = \int_{\mathscr{C}} (x - y)\, dy$.

(c) À l'aide d'un théorème intégral, déduire des questions **2c)** et **3b)** que la circulation du champ de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x + 1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathscr{C}$ est égale à $I_3 = 10(\pi + 3)$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points - 35min)

Soient $A(2,4,0)$, $B(2,4,3)$, $C(0,0,3)$ et $D(0,4,3)$ quatres points dans l'espace.
On considère le tétraèdre de sommets $ABCD$ défini par :

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x \leq y \leq 4, \ 3x + 2z \geq 6 \ \text{ et } z \leq 3\}.$$

1. Faire une figure en perspective du tetraèdre Ω.

2. (a) Déterminer la projection D du tetraèdre Ω sur le plan $z = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oz), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

3. (a) Déterminer la projection D du tetraèdre Ω sur le plan $x = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

4. Calculer le volume du tétraèdre $V(\Omega)$.

5. Montrer que l'ordonnée du centre de gravité de Ω est $y_G = \dfrac{1}{V(\Omega)} \displaystyle\iiint_\Omega y\,dxdydz = 3$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points - 35 min)

Soient S_1 et S_2 les deux surfaces définies par les équations implicites suivantes :

$$S_1 : \ -2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad S_2 : \ x + z = 1.$$

On considère la courbe $\mathscr{C} = S_1 \cap S_2$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est également l'intersection d'un plan avec un cylindre d'axe parallèle à (Oz).
2. Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$.
3. Calculer la circulation de $\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathscr{C}$ orientée selon le sens croissant du paramètre choisi.
4. On considère la surface $\Sigma := \{(x,y,z) \in S_1 \ ; \ x + z \leq 1 \text{ et } z \geq 0\}$.
   (a) Paramétrer la surface Σ à l'aide des variables x et y.
   (b) A l'aide de la paramétrisation, déterminer le champ des normales à Σ faisant un angle obtu avec le demi-axe positif $[Oz)$.
   (c) Calculer le flux du champs de vecteur $\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à travers Σ.
5. À l'aide d'un théorème intégral et d'une figure, commenter l'égalité des résultats obtenus aux questions **3.** et **4c.**