Corrigé du Final MT22 - A2023

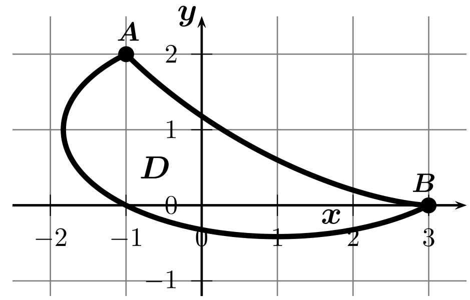
Exercice 1

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ définies par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \ \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta + \cos(2\theta) \\ 2\sin\theta - \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1 \quad \text{et } x+2y \leq 3.$$

et représenté graphiquement ci-contre.



1. (a) Montrer que pour tout point $M(x,y) \in \mathscr{C}_1$, on a $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 16\sin^2(\frac{3\theta}{2})$.

Correction :

$$x'(\theta) = -2\sin\theta - 2\sin(2\theta) \quad \text{ et } y'(\theta) = 2\cos\theta - 2\cos(2\theta).$$

$$\begin{aligned}(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= \Big(4\sin^2\theta + 8\sin(\theta)\sin(2\theta) + 4\sin^2(2\theta)\Big) + \Big(4\cos^2\theta - 8\cos(\theta)\cos(2\theta) + 4\cos^2(2\theta)\Big) \\ &= 8 + 8\big(\sin(\theta)\sin(2\theta) - \cos(\theta)\cos(2\theta)\big) \\ &= 8 - 8\cos(3\theta) = 8 \times 2\sin^2(\tfrac{3\theta}{2}).\end{aligned}$$

(b) En déduire la longueur $\ell(\mathscr{C}_1)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Correction :

$$\begin{aligned}\ell(\mathscr{C}_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(\tfrac{3\theta}{2}) d\theta \\ &= \Big[-\frac{2}{3} \times 4\cos(\tfrac{3\theta}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\big(-\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + \cos(0)\big) = \frac{4}{3}(\sqrt{2}+2).\end{aligned}$$

(c) Montrer que pour tout point $M(x,y) \in \mathscr{C}_1$, on a $(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2 = 5 + 4\cos(3\theta)$.

Correction :

$$\begin{aligned}(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2 &= \Big(4\cos^2\theta + 4\cos(\theta)\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\Big) + \Big(4\sin^2\theta - 4\sin(\theta)\sin(2\theta) + \sin^2(2\theta)\Big) \\ &= 5 + 4\big(\cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta)\big) \\ &= 5 + 4\cos(3\theta).\end{aligned}$$

(d) On oriente $\mathscr{C}_1$ de A vers B. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1} (x^2+y^2)dy = -6 + \frac{4}{5}$.

TSVP !

Correction : Utiliser le formulaire en fin d'exercice. Il faut calculer

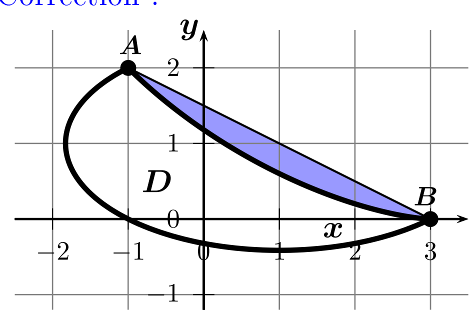
$$\begin{aligned}
(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2 \times y'(\theta) &= \big(5 + 4\cos(3\theta)\big) \times \Big(2\cos\theta - 2\cos(2\theta)\Big) \\
&= 10\cos\theta - 10\cos(2\theta) + 8\cos(3\theta)\cos\theta - 8\cos(3\theta)\cos(2\theta) \\
&= 10\cos\theta - 10\cos(2\theta) + 4\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) - 4\cos(5\theta) - 4\cos\theta \\
&= 6\cos\theta - 6\cos(2\theta) + 4\cos(4\theta) - 4\cos(5\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}_1} (x^2+y^2)dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \Big(6\cos\theta - 6\cos(2\theta) + 4\cos(4\theta) - 4\cos(5\theta)\Big)d\theta \\
&= \Big[6\sin\theta - 3\sin(2\theta) + \sin(4\theta) - \frac{4}{5}\sin(5\theta)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0} \\
&= \boxed{-6 + \frac{4}{5}}
\end{aligned}$$

2. Soit D_1 le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_1$ et le segment $[AB]$

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_1 sur la figure ci-dessus.

Correction :



(b) Paramétrer le segment $[AB]$ orienté de B vers A.

Correction :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [AB] \Leftrightarrow \exists t : 0 \to 2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \end{pmatrix},$$

(c) Montrer que $\displaystyle\int_{\overrightarrow{BA}} (x^2+y^2)dy = \frac{22}{3}$.

Correction : Il faut calculer

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 \times y'(t) = \big((3-2t)^2 + t^2\big) \times 1 = 9 - 12t + 5t^2$$

$$\int_{\overrightarrow{BA}} (x^2+y^2)dy = \int_0^2 \big(9 - 12t + 5t^2\big)dt = \Big[9t - 6t^2 + \frac{5}{3}t^3\Big]_0^2 = 18 - 24 + \frac{40}{3} = \frac{22}{3}$$

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\iint_{D_1} x\, dxdy$.

(Indication : utiliser les résultats des questions **1.(d)** *et* **2.(c)***.)*

Correction : D'après le théorème de Green-Riemann, on a

$$\iint_{D_1} x\,dxdy = \frac{1}{2}\left(\int_{\overrightarrow{BA}} (x^2+y^2)dy + \int_{\mathscr{C}_1} (x^2+y^2)dy\right) = \frac{16}{15}$$

3. Soit $D_2 = D \cup D_1$.

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(1+2r\sqrt{2}\cos\theta, 1+r\sqrt{2}\sin\theta) \times 4rd\theta\right) dr.$$

(b) On admet que $Aire(D_1) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}$. Déterminer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 0 \le z \le 3-x \text{ et } (x,y) \in D\}.$$

Correction :

$$Vol(\mathcal{V}) = \iint_D (3-x)dxdy = \iint_{D_2} (3-x)dxdy - \iint_{D_1} (3-x)dxdy$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} (3-x)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 4r(2-2r\sqrt{2}\cos\theta)d\theta\right) dr \\ &= \int_0^1 \left[4r(2\theta - 2r\sqrt{2}\sin(\theta)\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} dr \\ &= \int_0^1 (8r\pi + 16r^2)dr = \left[4\pi r^2 + \frac{16}{3}r^3\right]_0^1 = 4\pi + \frac{16}{3}\end{aligned}$$

$$Vol(\mathcal{V}) = 4\pi + \frac{16}{3} - 3\left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{15} = \boxed{\frac{11\pi}{2} - \frac{8}{5}}$$

Formulaire : $\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\cos(n\theta)\cos(p\theta) = \frac{1}{2}\cos\big((n+p)\theta\big) + \frac{1}{2}\cos\big((n-p)\theta\big)$.
$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\sin(n\theta)\sin(p\theta) = \frac{1}{2}\cos\big((n-p)\theta\big) - \frac{1}{2}\cos\big((n+p)\theta\big)$

Exercice 2 (Barème approximatif : 12.5 points + 1point bonus - 1h)

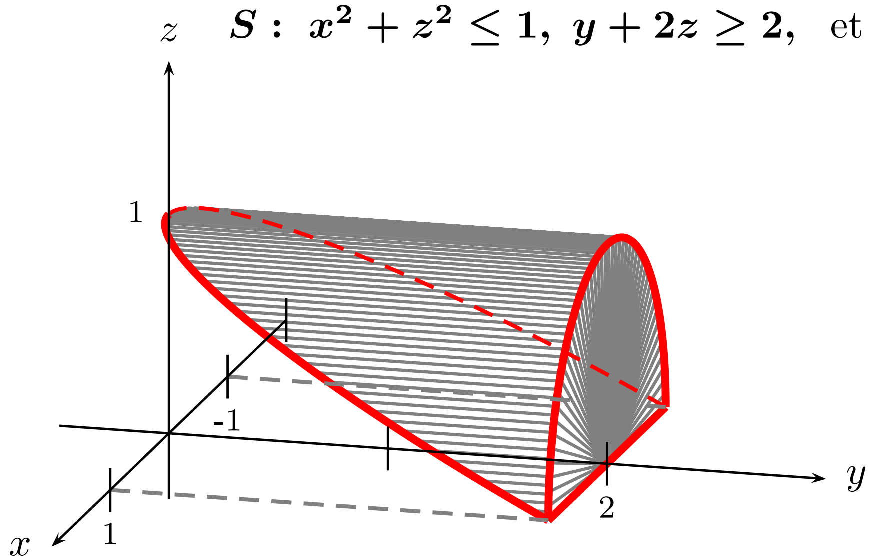
Partie I - (Barème approximatif : 5 points - 30min)

On considère le solide Ω défini par :

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2+z^2 \le 1,\ y+2z \ge 2 \text{ et } y \le 2\}.$$

1. Faire une figure en perspective du solide Ω.

Correction :



2. (a) Déterminer la projection D du solide Ω sur le plan $y=0$.

Correction : Il s'agit de déterminer le domaine de définition des variables (x,z) :

$$y+2z \geq 0 \text{ et } y \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z \geq 0}$$

La projection orthogonale de Ω sur le plan $y=0$ est un demi disque défini par :

$$D := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x^2+z^2 \leq 1 \text{ et } z \geq 0\}.$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oy), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Il reste à encadrer la variable y : $\boxed{2-2z \leq y \leq 2}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_D \left(\int_{2-2z}^{2} f(x,y,z)dy\right) dxdz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_{2-2r\sin\theta}^{2} r \times f(r\cos\theta, y, r\sin\theta)dy\right) d\theta\right) dr.\end{aligned}$$

3. (a) Déterminer la projection D du solide Ω sur le plan $x=0$.

Correction : Il s'agit de déterminer le domaine de définition des variables (y,z) :

$$x^2+z^2 \leq 1 \quad \Rightarrow z \in [-1,1]$$

$$y+2z \geq 0 \text{ et } y \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z \geq 0}$$

La projection orthogonale de Ω sur le plan $x=0$ est définie par :

$$D := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 0 \leq z \leq 1 \text{ et } 2-2z \leq y \leq 2\}.$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Il reste à encadrer la variable x : $\boxed{-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}}$.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{2-2z}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz.$$

4. En déduire que le volume du solide Ω est $V(\Omega) = \frac{4}{3}$.

Correction :

$$\begin{aligned}
V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_{2-2r\sin\theta}^{2} r\, dy \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} 2r^2 \sin\theta\, d\theta \right) dr \\
&= 2 \left(\int_0^1 r^2\, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) = 2 \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \times \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_{2-2z}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^1 4z\sqrt{1-z^2}\, dz = \Big[-\frac{4}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^1 = 0 - (-\tfrac{4}{3}) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

5. Calculer l'ordonnée du centre de gravité de Ω définie par $y_G = \dfrac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} y\, dxdydz$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} y\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_{2-2r\sin\theta}^{2} r \times y\, dy \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left[r \times \frac{y^2}{2} \right]_{2-2r\sin\theta}^{2} d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} r(4r\sin\theta - 2r^2\sin^2\theta)\, d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \Big[-4r^2\cos\theta - r^3\big(\theta - \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\big) \Big]_0^{\pi} dr \\
&= \int_0^1 (8r^2 - \pi r^3) dr \\
&= \left[\frac{8r^3}{3} - \frac{\pi r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

D'où $y_G = 2 - \dfrac{3\pi}{16}$.

Partie II - (Barème approximatif : 7.5 points - 30min)

Le bord $\mathcal{S}$ de Ω est constitué de trois faces, soit $\mathcal{S} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, définies comme suit :

$$\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + z^2 = 1 \ , \ y + 2z \geq 2 \text{ et } y \leq 2\}$$
$$\Sigma_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \ , \ y + 2z = 2 \text{ et } y \leq 2\}$$
$$\Sigma_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + z^2 \leq 1 \ , \ y = 2 \text{ et } z \geq 0\}.$$

1. (a) Paramétrer Σ_1 en coordonées cylindriques.

Correction :

$$M \in \Sigma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (y, \varphi) \in D_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ y \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

où $D_1 := \{(y, \varphi) \in \mathbb{R}^2 ; \ 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ et } 2 - 2\sin\theta \leq y \leq 2\}$.

(b) Déterminer le champ des normales à Σ_1 dirigé vers le haut.

Correction : On calcule successivement

$$\vec{t_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \pm \vec{t_y} \wedge \vec{t_\varphi} = \pm \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Le champ des normales dirigées vers le haut doit avoir une troisième composante positive donc on choisit $\vec{N} = + \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

(c) Calculer le flux de $\vec{W}(x + z, 2x + y, z - x)$ à travers Σ_1.

Correction : On calcule $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W}$ en fonction de y et φ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W} = + \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi + \sin\varphi \\ 2\cos\varphi + y \\ \sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix} &= \cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi) + \sin\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) \\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

$$Flux_{\Sigma_1}(\overrightarrow{W}) = \iint_{D_1} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W} dy d\varphi = \int_0^\pi \left(\int_{2-2\sin\theta}^2 1 dy \right) d\varphi = \int_0^\pi 2\sin\varphi \, d\varphi = \Big[-2\cos\varphi \Big]_0^\pi = 4.$$

$\boxed{Flux_{\Sigma_1}(\overrightarrow{W}) = 4.}$

2. (a) Paramétrer Σ_2 à l'aide des variables x et y.

Correction :

$$M \in \Sigma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x, y) \in D_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

où $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \text{ et } y \leq 2\}$. Le domaine D_2 est la moitié de l'intérieur d'une ellipse de centre $(0, 2)$ et de rayons 1 sur (Ox) et 2 sur (Oy).

(b) Déterminer le champ des normales à Σ_2 dirigées vers le bas.

Correction : On calcule successivement

$$\vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \pm \vec{t_x} \wedge \vec{t_y} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le champ des normales dirigées vers le bas doit avoir une troisième composante négative donc on choisit $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Calculer l'aire de Σ_2.

Correction :

$$Aire(\Sigma_2) = \iint_{\Sigma_2} 1\, d\sigma = \iint_{D_1} ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}|| dxdy = \frac{\sqrt{5}}{2} Aire(D_2) = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$$

(d) Calculer le flux de $\vec{W}$ à travers Σ_2.

Correction : On calcule $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W}$ en fonction de x et y :

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W} = + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + (1 - \frac{y}{2}) \\ 2x + y \\ (1 - \frac{y}{2}) - x \end{pmatrix} = -\frac{2x + y}{2} - \left((1 - \frac{y}{2}) - x\right) = -1.$$

$$Flux_{\Sigma_2}(\overrightarrow{W}) = \iint_{D_2} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{W} dyd\varphi = \iint_{D_2} -1\, d\sigma = -Aire(D_2) = -\frac{(1 \times 2 \times \pi)}{2} = -\pi.$$

$$\boxed{\mathcal{F}lux_{\Sigma_2}(\overrightarrow{W}) = -\pi.}$$

3. Calculer de deux façons différentes, le flux de $\overrightarrow{W}$ à travers $\mathcal{S}$.

Correction : Il reste à calculer $\mathcal{F}lux_{\Sigma_3}(\overrightarrow{W}) = \pi$. La surface Σ_3 est contenue dans le plan $y = 2$. Ici il faut appliquer la formule exacte du Flux avec le champ des normales unitaires $\vec{n}$ dirigé vers l'extérieur de Ω. On a

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} x + z \\ 2x + 2 \\ z - x \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{W} = 2 - 2x.$$

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma_3}(\overrightarrow{W}) = \iint_{\Sigma_3} (2 - 2x) dxdz = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} r(2r\cos\theta + 2) d\theta \right) dr = \int_0^1 2r\pi\, dr = \pi.$$

$$\mathcal{F}lux_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{W}) = \mathcal{F}lux_{\Sigma_1}(\overrightarrow{W}) + \mathcal{F}lux_{\Sigma_2}(\overrightarrow{W}) + \mathcal{F}lux_{\Sigma_3}(\overrightarrow{W}) = 4$$

Avec le théorème de Gauss-Ostrogradki, le champ des normales étant dirigé vers l'extérieur, on a également

$$\mathcal{F}lux_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{W}) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{W}(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Omega} 3\, dxdydz = 3V(\Omega) = 4.$$