Corrigé du Médian MT22 - A2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1+\alpha x^2 - e^{-y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange de la fonction exp à l'ordre 1 en $a = 0$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\xi \in]0,1[$ tel que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} e^{\xi t}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = 1$.
(Indication : étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$ pour démontrer l'équivalence.)

Correction : On utilise la formule de Taylor-Lagrange pour obtenir une autre expression de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{\cancel{1} + \alpha x^2 - (\cancel{1} - y^2 + \frac{y^4}{2} e^{-\xi y^2})}{x^2+y^2} = \frac{\alpha x^2 + y^2 - \frac{y^4}{2} e^{-\xi y^2}}{x^2+y^2}$$

• Si $\alpha \neq 1$, on considère le chemin d'équation $x = y$ paramétré par la fonction Φ définie par $\Phi(t) = \binom{t}{t}$ et continue en $t = 0$ avec $\Phi(0) = (0,0)$. On calcule la composée

$$f \circ \Phi(t) = f(t,t) = \frac{(\alpha+1)}{2} - \frac{t^2}{4} e^{-\xi t^2} \underset{t \to 0}{\rightarrow} \frac{(\alpha+1)}{2} \neq f(0,0).$$

La fonction composée $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit que c'est la fonction f qui n'est pas continue en $(0,0)$.

• Si $\alpha = 1$, on démontre la C.S. de continuité en $(0,0)$. Passons en coordonnées polaires au voisinage de $(0,0)$:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 - \frac{r^2 \sin^4\theta}{2} e^{-\xi r^2 \sin^2\theta}$$

On obtient

$$\forall r \geq 0,\ \forall \theta \in [0, 2\pi[,\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = \left|\frac{r^2 \sin^4\theta}{2} e^{-\xi r^2 \sin^2\theta}\right| \leq \frac{r^2}{2}$$

On pose $g(r) = \frac{r^2}{2} \underset{r \to 0}{\rightarrow} 0$. La condition suffisante de continuité est démontrée.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ en fonction de α.

   Correction : • $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\frac{1+\alpha h^2-1}{h^2}-1}{h} = \frac{\alpha-1}{h}$.
   La dérivée partielle première de f par rapport à x existe si et seulement si $\alpha-1=0$, autrement dit si $\alpha=1$. Dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   • $\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \dfrac{\frac{1-e^{-k^2}}{k^2}-1}{k} = \frac{\frac{k^2-\frac{k^4}{2}e^{-\xi k^2}}{k^2}-1}{k} = -\frac{k}{2}e^{-\xi k^2} \underset{t\to 0}{\to} 0$.
   La dérivée partielle première de f par rapport à y existe quelle que soit la valeur de α et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

3. Pour $\alpha=1$, la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

   Correction : • On commence par déterminer la fonction ε telle que
   $$f(h,k) = f(0,0) + 0\times h + 0\times k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$
   On obtient
   $$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = -\frac{k^4}{2(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}e^{-\xi k^2}$$
   • Ensuite on démontre que $\lim\limits_{||(h,k)||\to 0} \varepsilon(h,k)=0$:
   Un passage en coordonnées polaires nous permet d'obtenir
   $$\forall r\geq 0,\ \forall\theta\in[0,2\pi[,\ |\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{r\sin^4\theta}{2}\right|e^{-\xi r^2\sin^2\theta} \leq \frac{r}{2} \underset{r\to 0}{\to} 0.$$
   La fonction f est bien différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f la fonction définie par
$$f(x,y) = \ln(1+x+2y) - 2y(1+x+y)$$

1. Préciser le domaine de définition D de f et justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.

   Correction : Le domaine de définition de f est le demi plan
   $$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ 1+x+2y>0\}.$$

2. Déterminer le gradient de la fonction f .

   Correction : Le gradient de f en tout point $(x,y)\in D$ est
   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x+2y} - 2y \\ \dfrac{2}{1+x+2y} - 2(1+x+2y) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire l'unique point critique $M_0(x_0, y_0)$ de f.
(Indication : on justifiera que $1 + x_0 + 2y_0 = 1$.)
Correction : Il s'agit de résoudre le système $\nabla f(x, y) = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+x+2y} - 2y = 0 \\ \dfrac{\cancel{2}}{1+x+2y} - \cancel{2}(1+x+2y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+x+2y} - 2y = 0 \quad (L_1) \\ (1+x+2y)^2 = 1 \quad (L_2) \end{cases}$$

Comme on cherche une solution dans D on a nécessairement $1 + x + 2y = 1$. Ainsi

$$(L_1) \quad \Rightarrow \quad 1 - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}.$$

$$1 + x + 2y = 0 \text{ et } y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2y = -1$$

La fonction f admet un unique point critique $(x_0, y_0) = (-1, \frac{1}{2})$.

4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
Correction : On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+2y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2}{(1+x+2y)^2} - 2$$

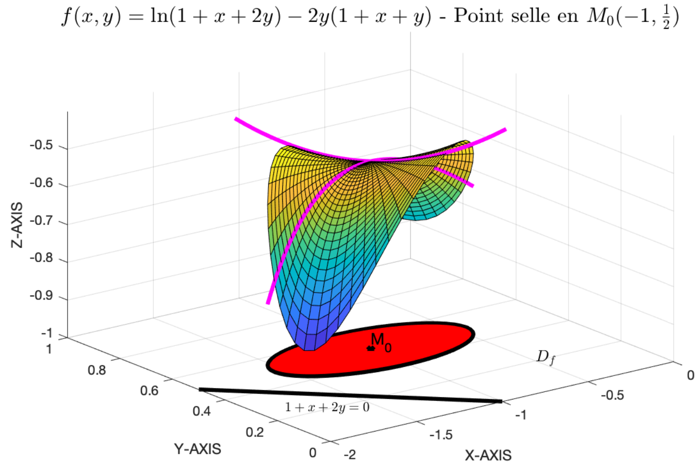
$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-4}{(1+x+2y)^2} - 4$$

5. En déduire la nature du point critique (minimum, maximum ou point selle).
Correction : Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ au moins on utilise le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 pour étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$.
Le discriminant de la partie régulière du second degré est

$$\widetilde{\Delta}_{(x_0,y_0)} = b^2 - ac = (-4)^2 - (-1) \times (-8) = 8 > 0.$$

Il s'agit d'un point selle.

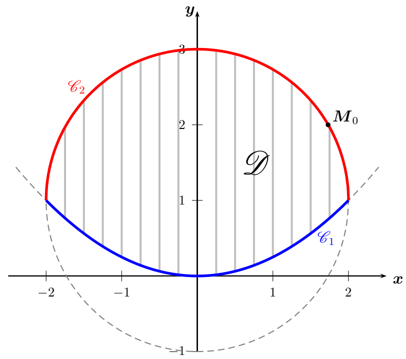
$f(x,y) = \ln(1 + x + 2y) - 2y(1 + x + y)$ - Point selle en $M_0(-1, \frac{1}{2})$



Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
On considère le domaine défini par $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \ \text{ et } \ 4y \geq x^2\}$.

1. Faire une figure.

   Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

   Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [-2,2], \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{4} \end{pmatrix}.$$

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0,\pi], \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 1 + 2\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(\sqrt{3}, 2) \in \mathscr{C}$.

   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.

   Correction : Voir schéma.

   (b) En déduire les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

   Correction : On observe que $M_0 \in \mathscr{C}_2$.
   On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_2(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} 2\cos\theta_0 = \sqrt{3} \\ 1 + 2\sin\theta_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6} \ [2\pi].$$

   Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ M = M_0 + \lambda \Phi'(\tfrac{\pi}{6}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \lambda \\ 2 + \lambda\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4 (Barème approximatif : 6 points)
Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \phi'(y) \\ \phi'(z) \end{pmatrix},$$

où ϕ est une fonction d'une variable réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire (sans chercher à le déterminer).

   Correction : On calcule le rotationnel de $\vec{V}$ en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \phi'(y) \\ \phi'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[\phi'(z)]}{\partial y} - \frac{\partial[\phi'(y)]}{\partial z} \\ \frac{\partial[\phi'(x)]}{\partial z} - \frac{\partial[\phi'(z)]}{\partial x} \\ \frac{\partial[\phi'(y)]}{\partial x} - \frac{\partial[\phi'(x)]}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   D'après le cours $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.

2. Exprimer, en fonction de ϕ, les potentiels scalaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\vec{V} = \nabla f$.

   Correction : On a $\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \phi(x) + \phi(y) + \phi(z) + K,\ K \in \mathbb{R}$.

3. On suppose que $\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \Delta f(x, y, z) = 0$.

   (a) Montrer que le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   Correction : On a $\mathrm{div}\,\vec{V} = \mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f = 0$.

   D'après le cours, $\quad \mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.

   (b) Justifier que $\forall\,t \in \mathbb{R},\ \Phi''(t) = 0$.

   Correction : On a

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \Delta f(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi''(x)+\phi''(y)+\phi''(z) = 0.$$

   Pour $x = y = z = t$, on obtient $\forall\,t \in \mathbb{R},\ \phi''(t) = 0$.

   Bien que cela ne soit pas demandé, on en déduit que $\phi(t) = at+b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) On cherche $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \psi(y, z) \\ \psi(z, x) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}$$

   où $\psi : (u, v) \mapsto \psi(u, v)$ est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et antisymétrique :

$$\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \psi(v, u) = -\psi(u, v).$$

   i. Montrer que $\exists\,C \in \mathbb{R},\ \forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = -\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = C$.

   Correction : On pose le système $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{V}$ composante par composante

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial v}(x, y) - \frac{\partial\psi}{\partial u}(z, x) = a & (L_1) \\ \frac{\partial\psi}{\partial v}(y, z) - \frac{\partial\psi}{\partial u}(x, y) = a & (L_2) \\ \frac{\partial\psi}{\partial v}(z, x) - \frac{\partial\psi}{\partial u}(y, z) = a & (L_3) \end{cases}$$

   L'antisymétrie de ψ entraîne $\boxed{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = -\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(v, u)}$. Par conséquent

$$(L_1) \quad \Rightarrow \quad \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial\psi}{\partial v}(x, y) + \frac{\partial\psi}{\partial v}(x, z) = a$$

   En posant $x = u$ et $y = z = v$, on obtient $\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = a$.

   On en déduit aussi que $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = -\frac{\partial\psi}{\partial v}(v, u) = -\frac{a}{2}$.

   Finalement $\exists\,C = -\frac{a}{2},\ \forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = -\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = C$.

ii. En déduire une expression algébrique du champ de vecteur $\vec{A}$.

Correction : Par intégration partielle, on trouve

$$\psi(u, v) = Cu - Cv + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

L'antisymétrie de ψ entraîne $K = 0$. On conclut que

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} C(y - z) \\ C(z - x) \\ C(x - y) \end{pmatrix}$$