Corrigé du Médian MT22 - A2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Young de la fonction Arctan à l'ordre 3 en $a = 0$: il existe une fonction ε telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{Arctan} t = t - \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \text{ et } 0 \leq \varepsilon(t) \leq \frac{t^2}{5}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.

   Correction : on démontre la C.S. de continuité en $(0,0)$. Simplifions l'expression de $f(x,y)$ en utilisant le DL de Arctan.

$$f(x,y) = \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x))}{x^2+y^2} = \frac{\frac{x^3}{3} - x^3\varepsilon(x)}{x^2+y^2}.$$

   Passons en coordonnées polaires au voisinage de $(0,0)$: $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On obtient $\forall r \geq 0,\ \forall \theta \in [0, 2\pi[$,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = \left|\frac{r\cos^3\theta}{3} - r\cos^3\theta\varepsilon(r\cos\theta)\right| \leq \left|\frac{r\cos^3(\theta)}{3}\right| + \left|r\cos^3(\theta)\varepsilon(r\cos\theta)\right| \leq \frac{r}{3} + \frac{r^3}{5}$$

   On pose $g(r) = \frac{r}{3} + \frac{r^3}{5} \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est démontrée.

2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

   Correction : • $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\frac{\frac{h^3}{3} - h^3\varepsilon(h)}{h^2} - 0}{h} = \frac{1}{3} - \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} \frac{1}{3}$.
   La dérivée partielle première de f par rapport à x existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3}$.
   • $\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0$.
   La dérivée partielle première de f par rapport à y existe quelle que soit la valeur de α et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction : • On commence par déterminer la fonction ε telle que

$$f(h,k) = f(0,0) + \frac{1}{3} \times h + 0 \times k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

On obtient

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - \frac{h}{3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-\frac{hk^2}{3} - h^3\varepsilon(h)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

• Ensuite on vérifie si $\lim\limits_{||(h,k)||\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$:

Un passage en coordonnées polaires nous permet d'obtenir

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{3} - \cos^3\theta\varepsilon(r\cos\theta).$$

On voit que la limite de cette expression quand $r \to 0$ dépend de θ. On justifie alors que la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$ en montrant que sur le chemin $y = x$ la limite de ε ne tend pas vers 0 :

$$\varepsilon(t,t) = -\frac{t^3}{3(2^{\frac{3}{2}})|t|^3} - \frac{t^3}{2^{\frac{3}{2}}|t|^3}\varepsilon(t) \underset{t\to 0^+}{\to} -\frac{1}{3} \neq 0.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - 2x.$$

1. Déterminer le gradient de la fonction f.

   Correction : On trouve

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 2 \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que les points critiques de f sont de la forme $(x_0, 0)$ ou $(0, y_0)$. Puis préciser toutes les valeurs de x_0 et y_0 possibles.

   Correction : Les points criques (x_0, y_0) vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \ln(x_0^2+y_0^2) + \dfrac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2} - 2 & = & 0 \quad (L_1) \\ \dfrac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2} & = & 0 \quad (L_2) \end{array}\right.$$

   L'équation (L_2) implique que $x_0y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Par conséquent les points critiques sont de la forme $(x_0, 0)$ ou $(0, y_0)$.

   • Si $y_0 = 0$ alors l'équation (L_1) implique que

$$\ln(x_0^2) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ou } x_0 = -1.$$

Si $x_0 = 0$ alors l'équation (L_1) implique

$$\ln(y_0^2) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(y_0^2) = \ln e^2 \Leftrightarrow y_0 = e \text{ ou } y_0 = -e$$

.

• L'ensemble des points critiques sont

$$(-1,0), \quad (1,0) \quad \text{et} \quad (0,e), \quad (0,-e).$$

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

   Correction : La fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ au moins donc on calcule uniquement 3 dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x}{x^2+y^2} - \frac{4x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x}{x^2+y^2} - \frac{4x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum ou point selle).

   Correction : • Pour le point $(-1,0)$

$$\widetilde{\Delta} = 0 - (-6+4) \times (-2) = -4 < 0.$$

   De plus $a = -10 < 0$ donc il s'agit d'un maximum local.

   • Pour le point $(1,0)$

$$\widetilde{\Delta} = 0 - (6-4) \times (2) = -4 < 0.$$

   De plus $a = 2 < 0$ donc il s'agit d'un minimum local.

   • Pour le point $(0, \pm e)$ on trouve

$$\widetilde{\Delta} = \frac{4}{e^2} > 0$$

   Ce sont des points selles.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(M) = \big(2y + 3z \,,\, 5z - 2x \,,\, x\big).$$

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.

   Correction : $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ donc $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.

2. Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par $\vec{A}(M) = \big(x\psi(y,z), y(x^2-2z), z\phi(x,y)\big)$, où ϕ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\mathbf{rot}\,\vec{A}$.

Correction : On a

$$\mathbf{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x\psi(y,z) \\ y(x^2-2z) \\ z\phi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) + 2y \\ x\frac{\partial \psi}{\partial z}(y,z) - z\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \\ 2xy - x\frac{\partial \psi}{\partial y}(y,z) \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la forme générale des fonctions ϕ et ψ de sorte que $\vec{V} = \mathbf{rot}\,\vec{A}$.

Correction : Après simplifications, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) & = & 3 \quad (L_1) \\ x\frac{\partial \psi}{\partial z}(y,z) - z\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) & = & 5z - 2x \quad (L_2) \\ 2y - \frac{\partial \psi}{\partial y}(y,z) & = & 1 \quad (L_3). \end{array} \right.$$

On peut intégrer partiellement (L_1) et (L_3) par rapport à y pour obtenir

$$\phi(x,y) = 3y + C_1(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(y,z) = -y + y^2 + C_2(z).$$

On détermine ensuite les fonctions C_1 et C_2 à l'aide de l'équation L_3 et de l'astuce vue au A.2.7 du chapitre 2 :

$$xC_2'(z) - zC_1'(x) = 5z - 2x \Leftrightarrow x\,(C_2'(z) + 2) - z\,(C_1'(x) + 5) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) + 5 \\ C_2'(z) + 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\frac{x^2}{2} - 5x \\ \lambda\frac{z^2}{2} - 2z \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

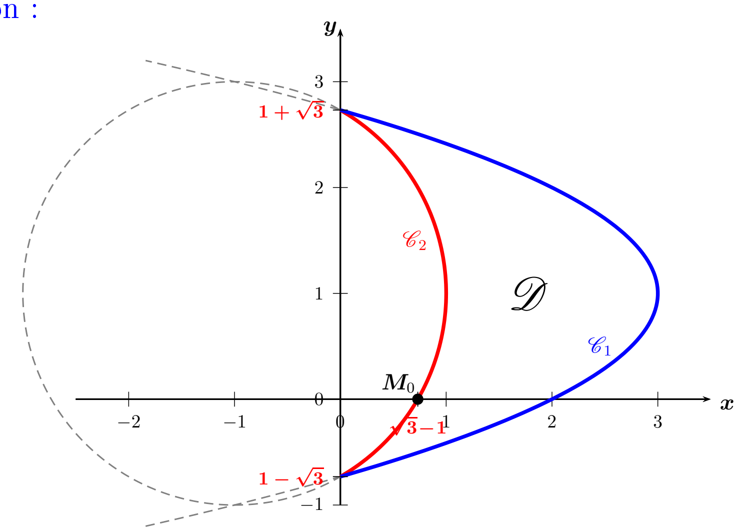
Finalement, $\vec{A}(M) = \big(x(-y + y^2 + \lambda\frac{z^2}{2} - 2z), y(x^2 - 2z), z(3y + \lambda\frac{x^2}{2} - 5x)\big)$.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 4 \;\text{ et }\; 0 \leq x \leq 3 - (y-1)^2\}.$$

1. Faire une figure.

Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

   Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 3-(t-1)^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} -1+2\cos\theta \\ 1+2\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(\sqrt{3}-1, 0) \in \mathscr{C}$.

   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.

   Correction : Voir la figure.

   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

   Correction : On observe que $M_0 \in \mathscr{C}_2$.

   On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_2(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} -1+2\cos\theta_0 = \sqrt{3}-1 \\ 1+2\sin\theta_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

   Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = M_0 + \lambda \Phi'(-\tfrac{\pi}{6}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1+\lambda \\ \lambda\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

   Correction : $y = x\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}$.