Corrigé du Médian MT22 - A2023

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

On appelle sinus cardinal, la fonction définie pour $t \neq 0$ par $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$.
Soit α un paramètre et f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1 + \alpha y(x+y^2) - \operatorname{sinc}(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = \frac{1}{6} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Young de la fonction sinc à l'ordre 3 en $a = 0$: il existe une fonction ε telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{sinc}(t) = 1 - \frac{t^2}{6} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } |\varepsilon(t)| \leq \frac{|t|}{120}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$.
(Indication : étudier les cas $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha \neq \frac{1}{3}$ pour démontrer l'équivalence.)

Correction : Simplifions l'expression de $f(x,y)$ en utilisant le DL de sinc.

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{1 + \alpha y(x+y^2) - (1 - \frac{1}{6}(x-y)^2 + (x-y)^3\varepsilon(x-y))}{x^2+y^2} \\ =& \frac{(\alpha - \frac{1}{3})xy + \alpha y^3 + \frac{1}{6}(x^2+y^2) - (x-y)^3\varepsilon(x-y)}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires au voisinage de $(0,0)$: $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On obtient $\forall r \geq 0,\ \forall \theta \in [0, 2\pi[$,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\alpha - \frac{1}{3})\cos\theta\sin\theta + \alpha r\sin^3\theta + \frac{1}{6} - r(\cos\theta - \sin\theta)^3\varepsilon(r(\cos\theta - \sin\theta)).$$

• Si $\alpha = \frac{1}{3}$ alors

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| =& \left|\frac{r\sin^3\theta}{3} - r(\cos\theta - \sin\theta)^3\varepsilon(r(\cos\theta - \sin\theta))\right| \\ \leq& \left|\frac{r\sin^3(\theta)}{3}\right| + \left|r(\cos\theta - \sin\theta)^3\varepsilon(r(\cos\theta - \sin\theta))\right| \\ \leq& \frac{r}{3} + \frac{16r^2}{120} \quad \text{car } |(\cos\theta - \sin\theta)| \leq 2. \end{aligned}$$

On pose $g(r) = \frac{r}{3} + \frac{2r^3}{15} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$. La condition suffisante de continuité est démontrée.

• Si $\alpha \neq \frac{1}{3}$ alors en suivant le chemin $x = y$ passant par l'origine, on a

$$f(t,t) = \frac{1 + \alpha(t^2+t^3) - 1}{2t^2} = \frac{\alpha(1+t)}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2} \neq \frac{1}{6} = f(0,0).$$

La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

Correction : Utilisons le DL de sinc qui s'écrit maintenant

$$f(x,y) = \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{3}y^3 - (x-y)^3\varepsilon(x-y)}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{6}\frac{-h^3\varepsilon(h)}{h^2} - \frac{1}{6}}{h} = \lim_{h\to 0} -\varepsilon(h) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{3}k^3+k^3\varepsilon(-k)}{k^2} - \frac{1}{6}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{3} + \varepsilon(-k) = \frac{1}{3}.$$

3. Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction : • On commence par déterminer la fonction ε telle que

$$f(h,k) = f(0,0) + 0\times h + \frac{1}{3}\times k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

On obtient

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{k}{3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-\frac{kh^2}{3} - (h-k)^3\varepsilon(h-k)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

• Ensuite on vérifie si $\lim_{||(h,k)||\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$:

Un passage en coordonnées polaires nous permet d'obtenir

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{3} - (\cos\theta - \sin\theta)^3\varepsilon(r(\cos\theta-\sin\theta)).$$

On voit que la limite de cette expression quand $r\to 0$ dépend de θ. On justifie alors que la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$ en montrant que sur le chemin $y=x$ la limite de ε ne tend pas vers 0 :

$$\varepsilon(t,t) = -\frac{t^3}{3(2^{\frac{3}{2}})|t|^3} \underset{t\to 0^+}{\to} -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} \neq 0.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 5.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(x,y) = xy + \cos(x+2y) - \frac{x^2}{4} - y^2.$

1. Calculer le gradient de f.

Correction :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - \sin(x+2y) - \frac{x}{2} \\ x - 2\sin(x+2y) - 2y \end{pmatrix}$$

2. Montrer que les points critiques (x_0,y_0) de f vérifient $x_0 = 2y_0$, puis les déterminer.

Correction : Les points critiques (x_0, y_0) satisfont l'équation $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - \sin(x_0+2y_0) - \frac{x_0}{2} = 0 \\ x_0 - 2\sin(x_0+2y_0) - 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - \frac{x_0}{2} = \sin(x_0+2y_0) \\ x_0 - 2(y_0 - \frac{x_0}{2}) - 2y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - \frac{x_0}{2} = \sin(x_0+2y_0) \\ x_0 - 2(y_0 - \frac{x_0}{2}) - 2y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - \frac{x_0}{2} = \sin(x_0+2y_0) \\ 2x_0 - 4y_0 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $x_0 = 2y_0$ puis que $\sin(2x_0) = 0$.
Les valeurs de x_0 possibles sont $x_0 = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Il y a donc une infinité de points critiques de la forme $(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de f.

   Correction : Les dérivées partielles secondes sont

$$a(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x+2y) - \frac{1}{2}$$

$$b(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 2\cos(x+2y)$$

$$c(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -4\cos(x+2y) - 2$$

4. En déduire la nature des points critiques identifiés à la question **2.** *(minimum, maximum ou point selle).*

   Correction : Pour $(x_0, y_0) = (\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(x_0 + 2y_0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

   • Si k est un entier relatif pair alors

$$a(x_0,y_0) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, \quad b(x_0,y_0) = 1 - 2 = -1 \quad \text{et } c(x_0,y_0) = -4 - 2 = -6.$$

   On a donc $\widetilde{\Delta} = (-1)^2 - (-\frac{3}{2}) \times (-6) = 1 - 9 = -8 < 0$. Puisque $a < 0$, il s'agit de maximum locaux.

   • Si k est un entier relatif impair alors

$$a(x_0,y_0) = -(-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad b(x_0,y_0) = 1-(-2) = 3 \quad \text{et } c(x_0,y_0) = -(-4)-2 = 2.$$

   On a donc $\widetilde{\Delta} = (3)^2 - (\frac{1}{2}) \times (2) = 9 - 1 = 8 > 0$. Il s'agit de points selles.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4.5 points)
Soit V le champ de vecteurs défini sur $D = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ par $V(x,y,z) = g(z) \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2} + z^2 \\ xy \\ xz \end{pmatrix}$ où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que V dérive d'un potentiel vecteur $U : D \to \mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$(**) \qquad \forall z > 0,\ zg'(z) + 2g(z) = 0.$$

Correction : Le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ doit vérifier $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = \vec{0}$. On obtient

$$\forall (x,y,z) \in D,\ 2xg(z) + xzg'(z) = 0.$$

En particulier, pour $x \neq 0$, on obtient $\forall\, z > 0,\ zg'(z) + 2g(z) = 0$.

2. Déterminer la fonction g satisfaisant $(**)$ ainsi que la condition initiale $g(1) = 1$.
   Correction : En écrivant $g'(z) = -\frac{2}{z}g(z)$, on obtient $g(z) = Ce^{-2\ln z} = \frac{C}{z^2}$. La condition initiale implique $C = 1$ et $\boxed{g(z) = \frac{1}{z^2}}$.

3. Déterminer **un** potentiel vecteur $\overrightarrow{U}$ sous la forme $\overrightarrow{U}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), 0\big)$ et tel que $\mathrm{div}\, U(x,y,z) = 2x + e^y$. *(On ne demande pas l'ensemble des solutions possibles.)*
   Correction : On pose le système $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) &= \dfrac{y^2}{2z^2} + 1 \quad (L_1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) &= \dfrac{xy}{z^2} \quad (L_2) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) &= \dfrac{x}{z}. \quad (L_3) \end{cases}$$

On intègre (L_1) partiellement par rapport à z pour obtenir

$$Q(x,y,z) = \frac{y^2}{2z} - z + C_1(x,y).$$

On intègre (L_2) partiellement par rapport à z pour obtenir

$$P(x,y,z) = -\frac{xy}{z} + C_2(x,y).$$

La ligne (L_3), nous donne comme indication supplémentaire

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}(x,y) - \left(-\frac{x}{z} + \frac{\partial C_2}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{x}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial C_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial C_2}{\partial y}(x,y).$$

Sachant que

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{U}(M) = \frac{\partial P}{x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{z} + \frac{\partial C_2}{\partial x}(x,y)\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{\partial C_1}{\partial y}(x,y)\right) = 2x + e^y.$$

On peut poser

$$C_1(x,y) = e^y \quad \text{et} \quad C_2(x,y) = x^2.$$

Une solution particulière est

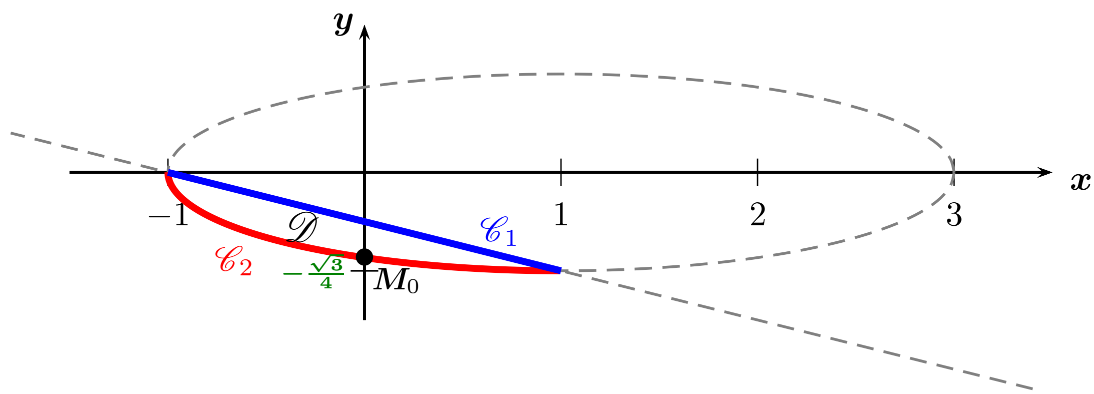
$$\overrightarrow{U}(M) = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{z} + x^2 \\ \frac{y^2}{2z} - z + e^y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{(x-1)^2}{4} + 4y^2 \leq 1 \;\text{ et }\; 1+x+4y \leq 0 \right\}.$$

1. Faire une figure.

    Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

    Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [-\frac{1}{2}, 0],\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} -1-4t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}],\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(0, -\frac{\sqrt{3}}{4}) \in \mathscr{C}$.

    (a) Placer le point M_0 sur votre figure.

    Correction : Voir la figure.

    (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

    Correction : On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_2(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\cos\theta_0 = 0 \\ \frac{1}{2}\sin\theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_0 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{4\pi}{3} \;[2\pi].$$

    Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\; M = M_0 + \lambda \Phi_2'(\tfrac{4\pi}{3}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}+\lambda}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

    (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Correction : La seconde ligne implique $\lambda = -(\sqrt{3} + 4y)$. Par substitution dans la première composante, on trouve

$$x = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + 4y) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x + 4y\sqrt{3} = -3}.$$