Corrigé du Médian MT22 - A2024

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Partie I - Continuité, différentiabilité

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2-y^2)\ln(x+y) & \text{si } x+y>0 \\ f(0,0)=0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Indications : (i) on rappelle que $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ *et (ii)* $\forall t \in]0,2],\ |t\ln t| \leq \sqrt{t}$.

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.

   Correction : On a pour $|x+y| \leq 2$,

   $$|f(x,y)-f(0,0)| = |(x^2-y^2)\ln(x+y)| = |(x-y)(x+y)\ln(x+y)| \leq |x-y|\sqrt{x+y}$$

   On utilise les coordonnées polaires $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

   $$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[, \quad |f(r\cos\theta, r\sin\theta)-f(0,0)| \leq r|\cos\theta-\sin\theta|\sqrt{r(\cos\theta+\sin\theta)} \leq 2r\sqrt{2r} = g(r)$$

   Comme $g(r)=2r\sqrt{2r} \underset{r\to 0}{\to} 0$, la condition suffisante de continuité est démontrée. La fonction f est bien continue en $(0,0)$.

2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$, puis en $(x,y)\neq(0,0)$.

   Correction :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\ln h = 0$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} -k\ln k = 0.$$

   Pour $(x,y)\neq(0,0)$:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x+y)+\frac{x^2-y^2}{x+y} = 2x\ln(x+y)+(x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\ln(x+y)+(x-y).$$

3. Soit u la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $u(t)=-t+e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t\in\mathbb{R}^*$ et $u(0)=0$.
   À l'aide des courbes paramétrées par $(t,u(t))$ et $(u(t),t)$ pour $t\in\mathbb{R}$, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

   Correction : • Pour justifier la non continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on choisit le chemin $(t,u(t))$:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t)) = 2t\ln(e^{-\frac{1}{t^2}})+(t-u(t)) = 2t\times(-\tfrac{1}{t^2})+(t-u(t)) = -\tfrac{1}{t}+(t-u(t)) \underset{t\to 0}{\to} \pm\infty.$$

   La limite n'existe pas donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

   • Pour justifier la non continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on choisit le chemin $(u(t),t)$:

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),t) = -2t\ln(e^{-\frac{1}{t^2}})+(u(t)-t) = -2t\times(-\tfrac{1}{t^2})+(u(t)-t) = \tfrac{1}{t}+(u(t)-t) \underset{t\to 0}{\to} \pm\infty.$$

   La limite n'existe pas donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   Correction : Il ne faut pas utiliser les liens logiques.
   On a $|\varepsilon(h,k)| = \left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{|h-k|\sqrt{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$. En coordonnées polaires, on obtient

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[, \quad |\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq |\cos\theta - \sin\theta| \sqrt{r(\cos\theta+\sin\theta)} \leq 2\sqrt{2r} = g(r)$$

   Comme $g(r) = 2\sqrt{2r} \underset{r\to 0}{\to} 0$, la fonction f est bien différentiable en $(0,0)$.

Partie II - Recherche d'extrema locaux

Soit g la fonction définie par $g(x,y) = (x^2-y^2)\ln(x+y) + xy + \frac{y^2}{2}$.
On admet que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y>0\}$.

1. Étudier l'équation $y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$ pour montrer que les points critiques (x_0,y_0) de g vérifient $x_0(2x_0+y_0) = 0$.
   Correction : Le gradient de g est

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\ln(x+y) + (x-y) + y \\ -2y\ln(x+y) + (x-y) + x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\ln(x+y) + x \\ -2y\ln(x+y) + 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= y\left(\cancel{2x\ln(x+y)} + x\right) + x\left(\cancel{-2y\ln(x+y)} + 2x\right) \\ &= xy + 2x^2 = x(2x+y). \end{aligned}$$

   Si $M_0(x_0,y_0)$ est un point crique de g alors $\nabla g(M_0) = \vec{0}$ donc les points critiques vérifient $x_0(2x_0+y_0) = 0$. Soit $x_0 = 0$, soit $y_0 = -2x_0$.

2. Montrer que les deux points critiques de g sont $(0,1)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}})$. *(Présentez une résolution de système !)*
   Correction : On détermine les deux points critiques en utilisant les deux conditions déterminées précédemment.
   • Si $x_0 = 0$ alors $\nabla g(0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y_0\ln(y_0) \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow y_0\ln(y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0$ ou $\ln y_0 = 0$. La seule possibilité est $y_0 = 1$ car g n'est pas définie en $(0,0)$.
   $\boxed{\text{Un premier point critique est } (0,1).}$
   • Si $y_0 = -2x_0$, on exprime le gradient en fonction de x_0 uniquement :

$$\nabla g(x_0, -2x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0\ln(x_0-2x_0) + x_0 \\ 4x_0\ln(x_0-2x_0) + 2x_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

   Les 2 équations sont équivalentes : on résout $2x_0\ln(-x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ou $2\ln(-x_0) + 1 = 0$. Le cas $x_0 = 0$ est impossible (on obtiendrait le point (0,0)) donc il reste $2\ln(-x_0) + 1 = 0$, soit $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.
   $\boxed{\text{Le second point critique est } (-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}).}$

3. Calculer les dérivées partielles secondes de g.

Correction :

$$a(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2\ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + 1.$$

$$b(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2x}{x+y}.$$

$$c(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2\ln(x+y) - \frac{2y}{x+y}.$$

4. Déterminer la nature des points critiques de g. *(minimum, maximum ou point selle).*

Correction : • En $(0,1)$, on a $a(0,1) = 0+0+1 = 1$, $b(0,1) = 0$ et $c(0,1) = -2$. Donc $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = 0 - 1 \times (-2) = 2 > 0$. Il s'agit d'un point selle.

• En $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}})$, on a $a(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = -1-2+1 = -2$, $b(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = -2 = -2$ et $c(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = 1-4 = -3$. Donc $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = 4 - (-2) \times (-3) = -2 < 0$. Comme $a(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) < 0$, il s'agit d'un maximum local.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)

Soit V le champ de vecteurs défini par $\vec{V}(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2}) \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$ où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{U} : D \to \mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$(**) \qquad \forall r > 0,\ rg'(r) + 4g(r) = 0.$$

Correction : Le champ de vecteur $\vec{V}$ doit satisfaire l'équation $\operatorname{div} \vec{V} = \vec{0}$. À l'aide du formulaire, on calcule

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2}) \operatorname{div} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix} + \nabla(g(\sqrt{x^2+y^2})) \cdot \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix} = 4z \text{ et } \nabla(g(\sqrt{x^2+y^2})) = \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) &= 4zg(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \times (z(x^2+y^2)) \\ &= z\left(4g(\sqrt{x^2+y^2}) + \sqrt{x^2+y^2}\,g'(\sqrt{x^2+y^2})\right) \end{aligned}$$

On pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z \neq 0$. On en déduit que $4g(r) + rg'(r) = 0$.

2. Déterminer la fonction g satisfaisant $(**)$ ainsi que la condition initiale $g(1) = 2$.

Correction : À l'aide du formulaire, on obtient $g(r) = \frac{2}{r^4}$ et $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}(x,y,z) = \textbf{rot}\begin{pmatrix}0\\0\\z^2 f(x,y)\end{pmatrix}$.

Correction : On résout $\textbf{rot}\,\vec{U} = \vec{V}$.

Tput d'abord, $\vec{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(z)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ -h(z)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ 0\end{pmatrix}$ et donc

$$\textbf{rot}\,\vec{U} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} h'(z)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ h'(z)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ -h(z)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2z^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$$

On en déduit que $h(z) = -z^2$ (ou $h'(z) = -2z$) et $f(x,y) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)} + K$, $K \in \mathbb{R}$.
On a bien

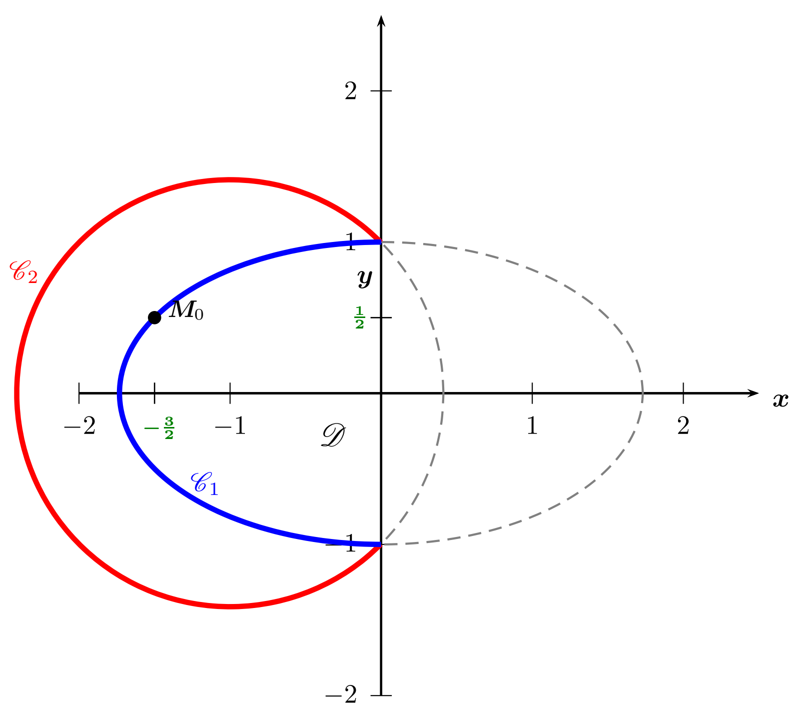
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^3} - \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^3}\right)\\ &= -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \frac{x^2}{3} + y^2 \geq 1, \quad \text{et} \;\; (x+1)^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

1. Faire une figure. *(Notez que* $(0,1)$ *et* $(0,-1)$ *sont les deux points d'extrémités de* $\mathscr{C}$*.)*

Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathscr{C}$.

(a) Placer le point M_0 sur votre figure.

Correction : Voir la figure.

(b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Correction : On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_1(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\theta_0 = -\frac{3}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].$$

Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = M_0 + \lambda \Phi_1'(\tfrac{5\pi}{6}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3+\lambda\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\lambda\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Correction : La seconde ligne implique $\lambda = \frac{1-2y}{\sqrt{3}}$. Par substitution dans la première composante, on trouve

$$x = -\frac{3+(1-2y)}{2} = -2+y \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x+2}.$$