Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2018- Final
Durée : 2h00.
Indiquer clairement le numéro de votre groupe
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1.

1. Soient a et b deux réels positifs ($a \neq b$). On considère le domaine défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

   (a) Représenter graphiquement D.

   (b) Calculer la masse totale de D en supposant que la masse surfacique est $\mu(x,y) = x$.

   Corrigé :

$$\int\int_D x dx dy = \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x dx dy = \int_0^b \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{a^2 b}{3},$$

   ou bien par changement de variables, on a avec $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta,\ \theta \in [0, \pi/2], r \in [0,1]$ et $J = abr$

$$\int\int_D x dx dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 a^2 b r^2 \cos\theta dr d\theta = \frac{a^2 b}{3}.$$

   (c) Soit γ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique. Calculer de 2 façons différentes la circulation de $\vec{V} = \left(0, \frac{x^2}{2}\right)$ le long de la courbe γ.

   Corrigé :
   <u>1$^{\text{ère}}$ méthode</u> : On utilise le théorème de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_\gamma(\vec{V}) = \int\int_D x dx dy = \frac{a^2 b}{3}.$$

   <u>2$^{\text{ème}}$ méthode</u> : Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de coordonnées $(0, b)$. Alors, en remarquant que la circulation sur OA et sur BO est nulle, de plus en paramétrant l'arc AB par $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, \pi/2]$, on a

$$\int\int_D x dx dy = \int_\gamma \frac{x^2}{2} dy = 0 + \int_0^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2 t}{2} b\cos t dt + 0 = \int_0^1 \frac{ba^2(1-u^2)}{2} du = \frac{a^2 b}{3}.$$

   (d) On suppose que la masse surfacique de D est constante et égale à 1, donner les coordonnées du centre de gravité de D.

   Corrigé : Comme $\mu = 1$, on a que la masse=aire(D)= $\frac{\pi ab}{4}$. Ainsi,

$$x_G = \frac{a^2 b}{3} \times \frac{4}{\pi ab} = \frac{4}{3\pi} a, \quad y_G = \frac{4}{3\pi} b.$$

2. Soit $\mathcal{V}$ le volume de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

   (b) Montrer que

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \frac{3\pi}{8}.$$

   Indication : On pourra faire le changement de variable $t = \sin(\theta)$.

   Corrigé :

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos^3\theta| \cos\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1\right) d\theta = \frac{1}{4}\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

(c) Exprimer $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz$ à l'aide d'intégrales simples en x, en y et en z, en utilisant des bâtons parallèles à $\vec{Ox}$.

Corrigé :

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}/2}\left[\int_{0}^{\sqrt{1-4y^2-z^2}} f(x,y,z)dx\right]dy\right]dz.$$

(d) Calculer la masse totale de $\mathcal{V}$ en supposant que la masse volumique est $\mu(x,y,z) = x$.

Indication : On pourra utiliser les résultats de la question 2-(b).

Corrigé :

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} xdxdydz = \int\int_{D(yOz)}\int_{0}^{\sqrt{1-4y^2-z^2}} xdxdydz = \frac{1}{2}\int\int_{D(yOz)}\left(1-4y^2-z^2\right)dydz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}/2}\left(1-4y^2-z^2\right)dydz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}/2}\left(1-z^2\right)dydz - 2\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}/2} y^2dydz$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{3/2}dz = \frac{1}{6}\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{16}.$$

(e) Retrouver le résultat précédent en utilisant un changement de variables, précisez bien le domaine de variation des nouvelles variables.

Corrigé : On pose $x = r\cos\theta\cos\phi,\ y = \frac{r}{2}\sin\theta\cos\phi,\ z = r\sin\phi,\ 0 \le r \le 1, -\pi/2 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ J = \frac{1}{2}r^2\cos\phi$. Ainsi,

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} xdxdydz = \int_{0}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}r^3\cos^2\phi\cos\theta d\theta d\phi dr = \frac{1}{8}\times 1\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

(f) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = \int_{0}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\cos\phi d\theta d\phi dr = \frac{\pi}{6}.$$

(g) Soient Σ la surface limitant $\mathcal{V}$, orientée suivant la normale extérieure et $\vec{W} = (0, x, xz)$. Déterminer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), le flux de $\vec{W}$ à travers Σ.

Corrigé : D'après la formule de Gauss-Ostrogradski, on sait que

$$\phi_{\Sigma}(\vec{W}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} div(\vec{W})dxdydz = \int\int\int_{\mathcal{V}} xdxdydz = \frac{\pi}{16}.$$

(h) En déduire le flux de $\vec{W}$ à travers

$$\Sigma_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+4y^2+z^2 = 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

Corrigé : On a $\Sigma = \Sigma_1(y=0)\cup\Sigma_2(x=0)\cup\Sigma_3(ellipsoide)$.

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = \int\int_{\Sigma_1} -xdxdz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{1} -r^2\cos\theta drd\theta = -\frac{2}{3}.$$

De plus

$$\phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = 0,$$

d'où

$$\phi_{\Sigma_3}(\vec{W}) = \phi_{\Sigma}(\vec{W}) + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{16} + \frac{2}{3}.$$

Exercice 2.

1. Soient $D = [0,1] \times [0,1]$ et $f(x,y) = x^y$.
   (a) Calculer
$$I_1 = \int\int_D f(x,y)dxdy.$$
Corrigé : On sait que
$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 x^y dx\right] dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1}dy = [\ln(y+1)]_0^1 = \ln(2).$$
   (b) En exprimant de deux manières I_1, déterminer la valeur de
$$J_1 = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt.$$
Corrigé : On peut vérifier que
$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 x^y dy\right] dx = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx = J_1 = \ln(2).$$
2. Soient $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ et $g(x,y) = \dfrac{x}{(1+x^2)(1+yx)}$.
   (a) Trouver les primitives suivantes :
$$\int \frac{1}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad \int \frac{t}{1+t^2}dt.$$
Corrigé :
$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(t) + c \quad \text{et} \quad \int \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c.$$
   (b) Calculer
$$I_2 = \int\int_D f(x,y)dxdy.$$
Corrigé : On sait que
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1 + \frac{y}{1+y^2}[\arctan(x)]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}\frac{y}{1+y^2}dy \\ &= \frac{\ln(2)}{2}[\arctan(y)]_0^1 + \frac{\pi}{4}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)\pi}{4}. \end{aligned}$$
   (c) Montrer que $g(x,y) + g(y,x) = f(x,y)$. En déduire, après avoir interverti les rôles de x et y, la valeur de
$$J_2 = \int\int_D g(x,y)dxdy.$$
Corrigé : Tout d'abord, on peut voir que
$$g(x,y) + g(y,x) = \frac{x+y+xy^2+x^2y}{(1+x^2)(1+y^2)(1+yx)} = \frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+yx)} = f(x,y).$$
Vu que D est symétrique en x, y on obtient, après avoir interverti les rôles de x et y, que
$$2J_2 = \int\int_D g(x,y)dxdy + \int\int_D g(y,x)dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy = \frac{\ln(2)\pi}{4}.$$
Alors $J_2 = \dfrac{\ln(2)\pi}{8}$.

(d) Exprimer J_2 en fonction de l'intégrale suivante :

$$K_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

En déduire la valeur de K_2.

Corrigé : On a

$$J_2 = \int\int_D g(x,y)dxdy = \int_0^1 \frac{[\ln(1+xy)]_0^1}{(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)} dx = K_2$$

Alors $K_2 = \dfrac{\ln(2)\pi}{8}$.

Exercice 3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. . On suppose que f est une fonction deux fois différentiables avec des dérivées partielles d'ordre 2 continues, vérifiant :

$$\Delta f(x,y) = 0.$$

On définit, pour tout $R > 0$, le domaine suivant :

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\right\}$$

et on note

$$\phi(R) = \int_0^{2\pi} f(R\cos(\theta) + x_0, R\sin(\theta) + y_0)d\theta.$$

(a) Exprimer l'intégrale suivante :

$$I_0 = \int\int_{D_{R_0}} f(x,y)dxdy,$$

en fonction d'une intégrale simple faisant intervenir $\phi(R)$.

Corrigé : On pose $x = R\cos(\theta) + x_0$ et $y = R\sin(\theta) + y_0$. On peut vérifier que $(x,y) \in D$ ssi $0 < R \leq R_0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. De plus, on a $|J| = R$. Cela implique que

$$I_0 = \int_0^{R_0} \left[\int_0^{2\pi} f(R\cos(\theta) + x_0, R\sin(\theta) + y_0)d\theta\right] RdR = \int_0^{R_0} R\phi(R)dR.$$

(b) Soient $\vec{V} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ et $\mathcal{C}_R$ le bord de D_R orienté dans le sens trigonométrique. Calculer, en utilisant le théorème de Green-Riemann, la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}_R$.

Corrigé : D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_R}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_R} -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy = \int\int_{D_R} \Delta f(x,y)dxdy = 0.$$

(c) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}_R$.

Corrigé :

$$\mathcal{C}_R = \begin{cases} x = R\cos(\theta) + x_0 \\ y = R\sin(\theta) + y_0 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(d) Exprimer la circulation $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}_R$ en fonction de $\phi'(R)$.

Corrigé : On peut remarquer que

$$\phi'(R) = \int_0^{2\pi} \left[\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(R\cos(\theta) + x_0, R\sin(\theta) + y_0) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(R\cos(\theta) + x_0, R\sin(\theta) + y_0)\right] d\theta.$$

Alors

$$R\phi'(R) = \int_{\mathcal{C}_R} -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_R}(\vec{V}).$$

(e) En déduire une expression de $\phi(R)$.

Corrigé : D'après la question précédente, on a $R\phi'(R) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_R}(\vec{V})$. Cela implique que $\phi'(R) = 0$, car $R > 0$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{C}_R}(\vec{V}) = 0$. Donc $\phi(R) = \phi(0) = 2\pi f(x_0, y_0)$.

(f) Quelle est la valeur de I_0 ?

Corrigé : On utilise l'expression de $\phi(R)$, on déduit que

$$I_0 = \int_0^{R_0} R\phi(R)dR = \pi R_0^2 f(x_0, y_0).$$

2. On considère deux fonctions g et h définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface (S) orientée suivant la normale unitaire extérieure $\vec{n}$. On note

$$I_1 = \int\int_S g \ \vec{\text{grad}}(h).\vec{n} \ d\sigma \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_S h \ \vec{\text{grad}}(g).\vec{n} \ d\sigma$$

(a) Montrer que pour toute fonction $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et pour tout champ de vecteurs $\vec{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on a

$$\text{div}(\psi\vec{U}) = \psi \ \text{div}(\vec{U}) + \vec{\text{grad}}(\psi) \cdot \vec{U}.$$

Corrigé : Notons $\vec{U} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, on peut vérifier que

$$\text{div}(\psi\vec{U}) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\psi R) = \psi \ \text{div}(\vec{U}) + \vec{\text{grad}}(\psi) \cdot \vec{U}.$$

(b) Soit $\vec{W} = g \ \vec{\text{grad}}(h) - h \ \vec{\text{grad}}(g)$. Exprimer $\text{div}(\vec{W})$ en fonction de g, h, Δg et Δh.

Corrigé :

$$\text{div}(g \ \vec{\text{grad}}(h) - h \ \vec{\text{grad}}(g)) = g\Delta h - h\Delta g + \vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{\text{grad}}(h) - \vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{\text{grad}}(h) = g\Delta h - h\Delta g.$$

(c) Montrer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), que si $\Delta g = \Delta h = 0$ alors $I_1 = I_2$.

Corrigé : D'après la question précédente, on sait que

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{W})dxdydz = \int\int\int_{\mathcal{V}} (g\Delta h - h\Delta g)dxdydz = 0.$$

De plus, par la formule de Gauss-Ostrogradski, on a

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{W})dxdydz = \int\int_S \vec{W}.\vec{n} \ d\sigma = 0.$$

Donc

$$\int\int_S g \ \vec{\text{grad}}(h).\vec{n} \ d\sigma = \int\int_S h \ \vec{\text{grad}}(g).\vec{n} \ d\sigma.$$

Rappel

1. Divergence : Soit $\vec{U}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Alors, on définit la divergence $\vec{U}$, comme suit
$$\mathrm{div}(\vec{U}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$
2. Masse totale et centre de gravité :
   (a) Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique $\mu(x,y)$, alors la masse totale de D est
   $$m = \int\int_D \mu(x,y)dxdy.$$
   De plus, le centre de gravité de D est $G = (x_G, y_G)$, avec
   $$x_G = \frac{1}{m}\int\int_D x\mu(x,y)dxdy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{m}\int\int_D y\mu(x,y)dxdy.$$
   (b) Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique $\mu(x,y,z)$, alors la masse totale de $\mathcal{V}$ est
   $$m = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mu(x,y,z)dxdydz.$$
3. Masse d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors la masse totale de Γ est donnée par formule suivante :
$$l = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$
4. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors
$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$
5. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ. Si Γ est orienté dans le même sens que Σ, alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on a
$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{V}).\vec{n}\ d\sigma.$$
6. Formule de Gauss-Ostrogradski : Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface (S). Si (S) est orientée suivant la normale extérieure, alors
$$\int\int_S \vec{V}.\vec{n}\ d\sigma = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{V})dxdydz.$$