Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2019- Final
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (**5 points**)

1. On considère la courbe $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^3$, définie par l'équation paramétrique suivante :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z(t) = t \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{C}_1$ est orientée dans le sens trigonométrique.

(a) Représenter graphiquement l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.

(b) Calculer la longueur de $\mathcal{C}_1$.

(c) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-y, x, \cos(z))$ le long de la courbe $\mathcal{C}_1$.

2. On considère la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ où $\mathcal{C}_2$ est la droite passant par les points $O = (1, 0, 0)$ et $A = (1, 0, 2\pi)$. De plus, on suppose que $\mathcal{C}_2$ est orientée de A vers O.

(a) Calculer la circulation du champ de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Soit (S) une surface de $\mathbb{R}^3$ limitée par la courbe $\mathcal{C}$, orientée vers l'haut. Calculer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), le flux de $\text{rot}(\vec{V})$ à travers la surface (S).

(c) Soit $\vec{W} = (P(x), Q(y), R(z))$. Calculer le la circulation du champ de $\vec{W}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2. (6 points)

1. On considère le domaine défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\right\}.$$

on suppose que la masse surfacique est $\mu(x, y) = x^2 + 4y^2$.

(a) Représenter graphiquement D.

(b) Calculer la masse totale de D.

(c) Calculer le moment d'inertie de D par rapport à $\vec{ox}$.

2. Soit Γ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

(b) Calculer de 2 façons différentes la circulation de $\vec{V} = \left(-yx^2, 4xy^2\right)$ le long de la courbe Γ.

Exercice 3. (9 points)

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

(a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

2. Soit Σ la surface limitant $\mathcal{V}$ orientée suivant la normale extérieure.

(a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface Σ.

(b) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = \left(xz^2, -yz^2, z\right)$ à travers Σ.

(c) Retrouver le volume de $\mathcal{V}$ en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé).

Tournez la page S.V.P

3. Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et g une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int\int_D g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

   Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$, Σ_2 la partie de Σ contenue dans le plan $z=0$ et $\Sigma_3 = \Sigma \backslash (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ (le complémentaire de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dans Σ).

   (a) Calculer le flux de champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, g(x,y))$ à travers Σ_1 et Σ_2.

   (b) Trouver le flux de $\vec{W}$ à travers Σ_3, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé).

Rappel

1. Masse totale, moment d'inertie et volume :

   (a) Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique $\mu(x,y)$, alors la masse totale de D est

$$m = \int\int_D \mu(x,y)dxdy.$$

   De plus, le moment d'inertie de D par rapport à l'axe $\vec{ox}$ est

$$\mathcal{M}_{\vec{ox}}(D) = \int\int_D y^2\mu(x,y)dxdy.$$

   (b) Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, alors le volume de $\mathcal{V}$ est

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz.$$

2. Longueur d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, alors la longueur totale de Γ est donnée par formule suivante :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

4. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ. Si Γ est orienté dans le même sens que Σ, alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on a

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{V}).\vec{n}\ d\sigma.$$

5. Formule de Gauss-Ostrogradski : Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface (S). Si (S) est orientée suivant la normale extérieure, alors

$$\int\int_S \vec{V}.\vec{n}\ d\sigma = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{V})dxdydz.$$