Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2022 - Médian
Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (6 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y + \frac{8}{xy}.$$

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
4. La fonction f admet-elle un point d'extremum local ? Justifier.
5. La fonction f admet-elle un point d'extremum global ? Justifier.

Exercice 2. (8 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le point $(x_0, 0)$.

1. Étudier la continuité de la fonction f en ce point.
2. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent-elles en ce point ?
3. La fonction f est-elle différentiable en ce point ?
4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$.
5. Étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point $(x_0, 0)$.
6. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
7. Commenter ce dernier en utilisant le théorème de Schwarz.

Exercice 3. (6 points) Soit g une fonction dérivable définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. On considère pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs suivant

$$\vec{V} = g(u) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u = x^2 + y^2.$$

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.
2. Soient h une primitive de g (à savoir $h'(u) = g(u)$), R une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et α un réel. On note
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ x \\ R(x,y) \end{pmatrix}$$
Trouver α et R pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$.
3. Déterminer g pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
4. On suppose que $\vec{V}$, dérive d'un potentiel scalaire. Déterminer le potentiel.
<u>Indication</u> : On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\int \frac{a}{a^2 + t^2} dt = \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + K \quad \text{et} \quad \arctan(-t) = -\arctan(t).$$