Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Mai 2018 - Partiel
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Soit

$$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y < 0\}.$$

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(1-x)y}\cos\left(\frac{1}{(x-1)^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \in Df, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le domaine Df.
2. La fonction f est-elle continue au point $(1,0)$?

   Corrigé : Par la condition suffisante de continuité, nous avons

   $$|f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta) - f(1,0)| \leq r$$

   ce qui nous permet de conclure, la continuité au point $(1,0)$.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières au point $(1,0)$?

   Corrigé :
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = 0$$
   de même on a $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$.
4. La fonction f est-elle différentiable au point $(1,0)$?

   Corrigé : Pour $h < 0, k > 0$, on a

   $$\epsilon(h,k) = \sqrt{\frac{-hk}{h^2+k^2}}\cos\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$$

   en faisant par exemple $\epsilon(-h,h)$, on a $\lim_{h\to 0^+} \epsilon(-h,h) \neq 0$, on peut donc affirmer la non différentiabilité de la fonction au point $(1,0)$.
5. Les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction sont elles continues ?

   Corrigé :, Non, voir le résultat du cours.

Exercice 2. On considère la fonction définie par

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \quad \text{pour tout} \quad x > 0,\ y > 0.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction g.

   Corrigé :

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)\left[-\frac{1}{x^2}(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] = \frac{1}{2}(1+y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right),$$

   on déduit la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y,

   $$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(1+x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right).$$

2. Déterminer les points critiques de la fonction g pour $x > 0$, $y > 0$.

Corrigé : On cherche (x^*, y^*) tel que $\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$, soit

$$\begin{cases} (1+y^*)\frac{(x^*)^2-y^*}{(x*)^2y^*} = 0 \\ (1+x^*)\frac{(y^*)^2-x^*}{x^*(y^*)^2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1+y^* = 0 \text{ ou } (x^*)^2 - y^* = 0 \\ 1+x^* = 0 \text{ ou } (y^*)^2 - x^* = 0 \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} y^* = -1 \\ x^* = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^* = -1 \\ (y^*)^2 - x^* = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (x^*)^2 - y^* = 0 \\ x^* = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (x^*)^2 = y^* \\ (y^*)^2 = x^*. \end{cases}$$

Le seul point critique est donc le point $(1, 1)$.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction g.

Corrigé :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1+y}{x^3},\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1+x}{y^3},\ \ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y).$$

4. Donner la nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s).

Corrigé : $\Delta(1,1) < 0$ et $a(1,1) > 0$ d'où $(1,1)$ est un minimum local pour la fonction g.

Exercice 3. Soit α une constante réelle et g une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2x\left(g'(x^2+y^2+z^2) - \alpha z\right) \\ \\ 2y\left(g'(x^2+y^2+z^2) - \alpha z)\right) \\ \\ 2zg'(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle valeur α_0 de α le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?

Corrigé : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus on sait que

$$rot(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 4yzg''(x^2+y^2+z^2) - 2y - 4yzg''(x^2+y^2+z^2) + 2\alpha y \\ \\ -4xzg''(x^2+y^2+z^2) + 2x + 4yzg''(x^2+y^2+z^2) - 2\alpha x \\ \\ 4xyg''(x^2+y^2+z^2) - 4xyg''(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(\alpha-1) \\ \\ 2x(1-\alpha) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

on voit que pour $\alpha = 1$, on a $rot(\vec{V}) = \vec{0}$. Donc $\alpha_0 = 1$.

2. On suppose que $\alpha = \alpha_0$. Calculer le potentiel scalaire f dont dérive $\vec{V}$.

Corrigé : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, alors il existe une fonction scalaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$. Donc, si $\alpha = 1$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xg'(x^2+y^2+z^2) - 2xz & (eq1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2yg'(x^2+y^2+z^2) - 2yz & (eq2) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2zg'(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2) & (eq3) \end{cases}$$

On intègre la première équation ($eq1$) par rapport à x, on obtient

$$f(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2) - x^2z + \phi(y,z)$$

On dérive l'équation précédente par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2yg'(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z)$$

On utilise la deuxième équation ($eq2$), on déduit que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z) = -2yz$$

En intégrant par rapport à y, on obtient que $\phi(y,z) = -y^2z + h(z)$. Donc

$$f(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2) - x^2z - y^2z + h(z)$$

On dérive l'équation précédente par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2zg'(x^2+y^2+z^2) - x^2 - y^2 + h'(z)$$

On utilise la troisième équation ($eq3$), on déduit que $h'(z) = 0$, donc $h(z) = cte$. Cela montre que

$$f(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2) - x^2z - y^2z + cte$$

3. Toujours dans le cas $\alpha = \alpha_0$. Calculer $div(\vec{V})$. En déduire Δf.

Corrigé : Si $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned} div(\vec{V}) &= 2(g'(x^2+y^2+z^2) - z) + 4x^2g''(x^2+y^2+z^2) \\ &\quad +2(g'(x^2+y^2+z^2) - z) + 4y^2g''(x^2+y^2+z^2) \\ &\quad +2g'(x^2+y^2+z^2) + 4z^2g''(x^2+y^2+z^2) \\ &= 6g'(x^2+y^2+z^2) + 4(x^2+y^2+z^2)g''(x^2+y^2+z^2) - 4z \end{aligned}$$

On sait que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$, donc $div(\vec{V}) = div(\vec{\nabla} f) = \Delta f$.

Exercice 4.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante :

$$(S_\alpha) : \quad x^2 + y^2 - \alpha z^2 - \alpha = 0.$$

(a) En discutant selon les valeurs de α déterminer la nature de (S_α). Faire une figure représentant les cas possibles.

Corrigé : Tout d'abord, on peut vérifier que cette équation est définie seulement pour $\alpha \geq 0$, puisque $x^2 + y^2 = \alpha(z^2 + 1)$. Dans le cas $\alpha = 0$, on obtient la droite $\{x = 0, y = 0\}$. Par ailleurs, pour $\alpha > 0$, obtient un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe $\vec{oz}$.

(b) On suppose que $\alpha \neq 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque appartenant à (S_α). Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à (S_α) en M_0.

Corrigé : Puisque $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (S_\alpha)$, on sait que $x_0^2 + y_0^2 - \alpha z_0^2 - \alpha = 0$ et de plus $\vec{N} = 2(x_0, y_0, -\alpha z_0)$ est vecteur normal à (S_α) au point M_0. Alors le plan tangent est

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - \alpha z_0(z - z_0) = x_0 x + y_0 y - \alpha z_0 z - \alpha = 0.$$

(c) Trouver le plan tangent à (S_α) en M_0 qui contient le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et les points $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.

Corrigé : On a $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{N} = (x_0, y_0, -\alpha z_0)$. Cela implique que $\vec{u}.\vec{N} = x_0 + y_0 = 0$. De plus, on a

$$x_0 + y_0 - \alpha z_0 - \alpha = 0$$

et

$$-x_0 + y_0 - \alpha = 0.$$

Cela montre que $z_0 = -1$, $y_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$. On injecte le tout dans l'équation de (S_α), on déduit que $\alpha = 4$. Le plan tangent dans ce cas est donc $-x + y + 2z = 2$.

2. On suppose que $\alpha = 4$. Soit C la courbe d'intersection entre (S_α) et le plan $y = \sqrt{5}z$. On suppose également que $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$.

(a) Trouver un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.

Corrigé : On utilise les équations cartésiennes, on déduit que les deux vecteurs $\vec{N} = 2(x_0, y_0, -4z_0)$ et $\vec{N}' = (0, -1, \sqrt{5})$ sont, respectivement, normaux à (S_α) et au plan $y = \sqrt{5}z$. Maintenant, on fait le produit vectoriel entre $\vec{N}$ et $\vec{N}'$, on trouve le vecteur tangent suivant

$$\vec{V} = \vec{N} \wedge \vec{N}' = 2(\sqrt{5}y_0 - 4z_0, -\sqrt{5}x_0, -x_0) = 2(z_0, -\sqrt{5}x_0, -x_0).$$

(b) Montrer que C peut s'écrire comme l'intersection d'un cylindre et d'un plan.

Corrigé : On sait que

$$C = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4z^2 = 4, \\ y = \sqrt{5}z. \end{array} \right.$$

Alors

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + z^2 = 4 & \text{(cylindre)} \\ y = \sqrt{5}z & \text{(plan).} \end{array} \right.$$

(c) Obtenir une équation paramétrique de C.

Corrigé : On paramétrise C, avec les coordonnées polaires, ce qui donne

$$C = \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sqrt{5}\sin(\theta) \\ z = 2\sin(\theta) \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(d) Retrouver, en utilisant la question précédente, un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.

Corrigé : On utilise l'équation paramétrique, on déduit que le vecteur suivant est tangent à C en M_0

$$\vec{U} = 2\Big(-\sin(\theta_0), \sqrt{5}\cos(\theta_0), \cos(\theta_0)\Big) = (-z_0, \sqrt{5}x_0, x_0).$$