Corrigé du Final MT22 - A2021

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

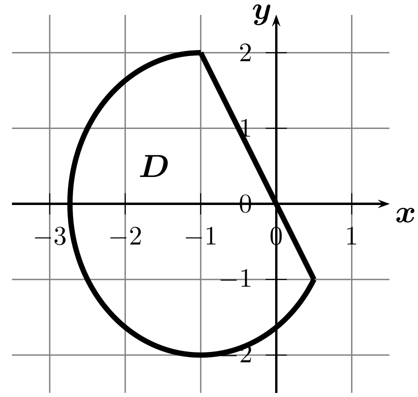
Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 12 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

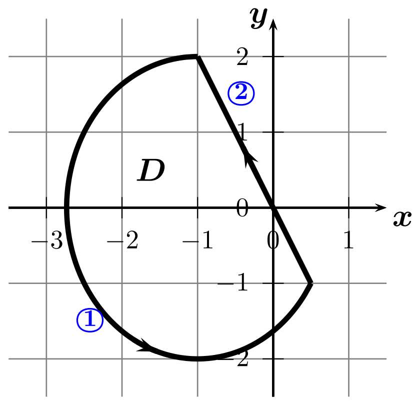
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ et } 2x + y \leq 0\right\},$$

et représenté graphiquement ci-contre



1. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.



Correction :

$$M \in ① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \to \frac{11\pi}{6}.$$

$$M \in ② \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t : \frac{1}{2} \to -1.$$

$$\text{ou bien} \quad M \in ② \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ 3t-1 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \to 1.$$

(b) Montrer que

$$\int_\Gamma y dx - x dy = -3 - \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Correction :

$$\int_\Gamma y dx - x dy = \int_{\frac{1}{2}}^{-1} -2t \times 1dt - t \times (-2)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} 2\sin\theta \times (-\sqrt{3}\sin\theta)\, d\theta - (-1+\sqrt{3}\cos\theta) \times 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} 0dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} (2\cos\theta - 2\sqrt{3})d\theta$$

$$= \Big[2\sin\theta - 2\sqrt{3}\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} = -1 - 2\sqrt{3} \times \frac{11\pi}{6} - (2 - \sqrt{3}\pi) = -3 - \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.$$

ou bien

$$\int_{2} y dx - x dy = \int_0^1 \underbrace{(3t-1) \times (-\tfrac{3}{2})dt - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}t) \times 3dt}_{=0} = 0$$

(c) À l'aide d'un théorème intégral à préciser, en déduire l'aire de D, noté $Aire(D)$.

Correction : La courbe $\mathscr{C}$ est fermée, sans point double et parcourue dans le sens trigonométrique. Par conséquent, si D et le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$ alors

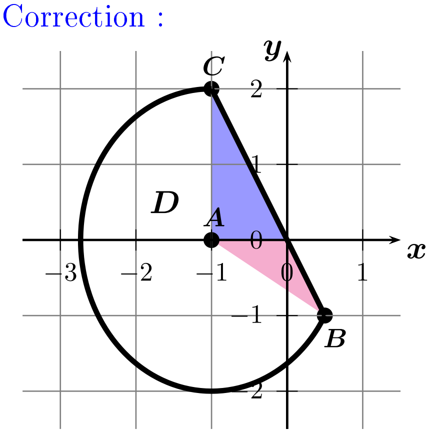
$$\int_\Gamma y dx - x dy = \iint_D \left(\frac{\partial[-x]}{\partial x} - \frac{\partial[y]}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D -2dxdy = -2 \times Aire(D).$$

D'où $Aire(D) = -\frac{1}{2}\int_\Gamma y dx - x dy = \dfrac{3}{2} + \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

2. Soit $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},-1)$ et $C(-1,2)$ trois points du plan. On note D_1 le domaine délimité par le triangle ABC.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_1 sur la figure ci-dessus.

Correction :



(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.

(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

Correction : • **Méthode 1 :** bâtons // (Oy)
Pour encadrer y, nous n'avons pas besoin de découper le domaine D_1. Nous avons besoin des équations des droites (AB) : $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ et (BC) : $y = -2x$. On obtient

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}^{-2x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

• **Méthode 2 :** bâtons // (Ox)
Pour encadrer x, il faut découper le domaine D_1 en $y = 0$. Nous avons besoin des équations des droites (AB) : $x = -\frac{3}{2}y - 1$, (AC) : $x = -1$ et (BC) : $x = -\frac{1}{2}y$. On obtient

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy &= \iint_{OAB} f(x,y)\,dxdy + \iint_{AOC} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\frac{3}{2}y-1}^{-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{0}^{2} \left(\int_{-1}^{-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy.\end{aligned}$$

3. Soit $D_2 = D \backslash D_1$ où le domaine D_1 est défini à la question **2.**

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} f(1+\sqrt{3}r\cos\theta, 2r\sin\theta) \times 2\sqrt{3}r\,d\theta \right) dr$$

(b) Montrer que le volume de $\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq 1-2x\}$ est égal à $\mathcal{Vol}(\mathcal{V}) = 9 + 4\pi\sqrt{3}$.
(Indication : exprimer le volume à l'aide d'une intégrale double sur D.)

Correction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}ol(\mathcal{V}) &= \iint_D (1-2x)dxdy \\
&= \iint_{D_1} (1-2x)dxdy + \iint_{D_2} (1-2x)dxdy \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}^{-2x} (1-2x)\, dy \right) dx + 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} r(3-2\sqrt{3}r\cos\theta)\, d\theta \right) dr \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-2x)(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}x)dx + 2\sqrt{3}\int_0^1 \Big[3r\theta - 2\sqrt{3}r^2\sin\theta)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} dr \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-2x)^2 dx + 2\sqrt{3}\int_0^1 (4\pi r + 3\sqrt{3}r^2)dr \\
&= \frac{2}{3}\Big[-\frac{1}{6}(1-2x)^3\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{3}\Big[(2\pi r^2 + \sqrt{3}r^3)\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times 27 + 4\pi\sqrt{3} + 6 = 9 + 4\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 8 points)

Choisir entre « **parties I et II** » ou « **parties I et III** »

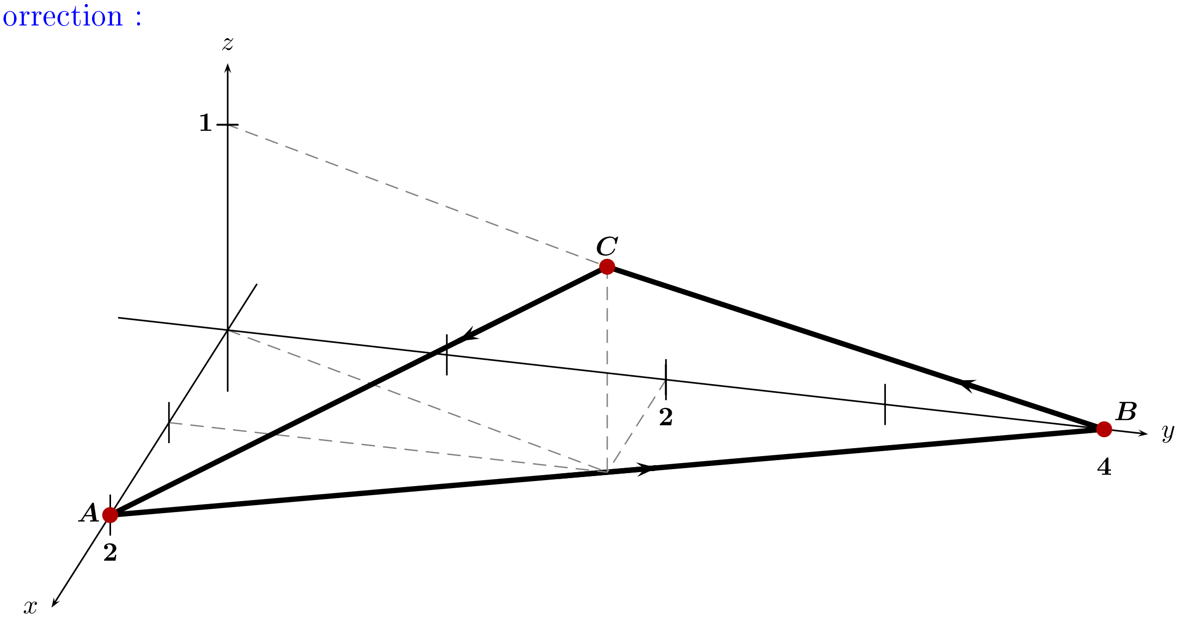
Partie I (Barème approximatif : 4 points)

Soient $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(1,2,1)$ trois points dans l'espace.

On considère la surface plane Σ délimitée par le triangle fermé ABC.

1. Faire une figure.

Correction :



2. On oriente Σ par le champ des normales unitaires $\vec{n}$ faisant un angle aigu avec (Oy). Indiquer sur une figure le sens de circulation associé sur le contour du triangle ABC.

Correction : Avec la règle de la main droite, on obtient le sens de circulation indiqué sur le schéma précédent.

3. On note $\mathscr{C}$ le bord de Σ. Paramétrer le courbe $\mathscr{C}$.

Correction :

$$M \in [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 4t \\ 0 \end{pmatrix}, t : 0 \to 1 \quad \text{ou bien} \quad M \in [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, t : 0 \to 2$$

$$M \in [\overrightarrow{BC}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 4-2t \\ t \end{pmatrix}, t : 0 \to 1$$

$$M \in [\overrightarrow{CA}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 1-t \end{pmatrix}, t : 0 \to 1$$

4. Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = (z, 0, 2x)$ le long de $\mathscr{C}$ que l'on notera $\mathcal{T}(\vec{V})$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} zdx + 2xdz &= \underbrace{\int_{\overrightarrow{AB}} zdx + 2xdz}_{=0} + \int_{\overrightarrow{BC}} zdx + 2xdz + \int_{\overrightarrow{CA}} zdx + 2xdz \\
&= \int_0^1 t \times 1dt + 2t \times 1dt + \int_0^1 (1-t) \times 1dt + 2(1+t) \times (-1)dt \\
&= \int_0^1 3tdt + \int_0^1 (-1-3t)dt = \boxed{-1}
\end{aligned}$$

Partie II (Barème approximatif : 4 points)

On admet que la surface Σ peut-être définie par

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2x + y = 4, \; z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2-z\}.$$

1. Paramétrer la surface Σ à l'aide des variables cartésiennes (x, z).

Correction :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4-2x \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{où } (x,z) \in D := \{(x,z) \; ; \; 0 \leq z \leq 1 \text{ et } z \leq x \leq 2-z\}.$$

2. Déterminer les composantes du vecteur normal unitaire $\vec{n}$ selon l'orientation imposée à la question **I-2.**

Correction : Tout d'abord

$$\vec{N} = \pm \vec{t_x} \times \vec{t_z} = \pm \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'orientation imposée à la question **I.2)**, on choisit $\vec{N} = -\vec{t_x} \times \vec{t_z} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on trouve

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le flux du champs de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$ à travers Σ à l'aide d'une intégrale surfacique.

Correction :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Flux_\Sigma(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}) = \int_D \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} \cdot \vec{N} dxdz = -Aire(D) = -1.$$

4. À l'aide d'un théorème intégral à préciser, justifier que $Aire(\Sigma) = -\sqrt{5} \times \mathcal{T}(\vec{V})$, sans calcul ou presque.

Correction : Puisque le sens de parcours de $\mathscr{C}$ est cohérent avec l'orientation du champ des normales unitaires à Σ selon la règle de la main droite, il y a égalité entre le calcul de la circulation de $\vec{V}$ et le calcul du flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$ d'après le théorème de Stokes Ampère.

La définition initiale du Flux est

$$Flux_\Sigma(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}) = \int_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_\Sigma -\frac{1}{\sqrt{5}} d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{5}} Aire(\Sigma).$$

D'où l'égalite, $Aire(\Sigma) = -\sqrt{5} \times Flux_\Sigma(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}) = -\sqrt{5} \times \mathcal{T}(\vec{V})$.

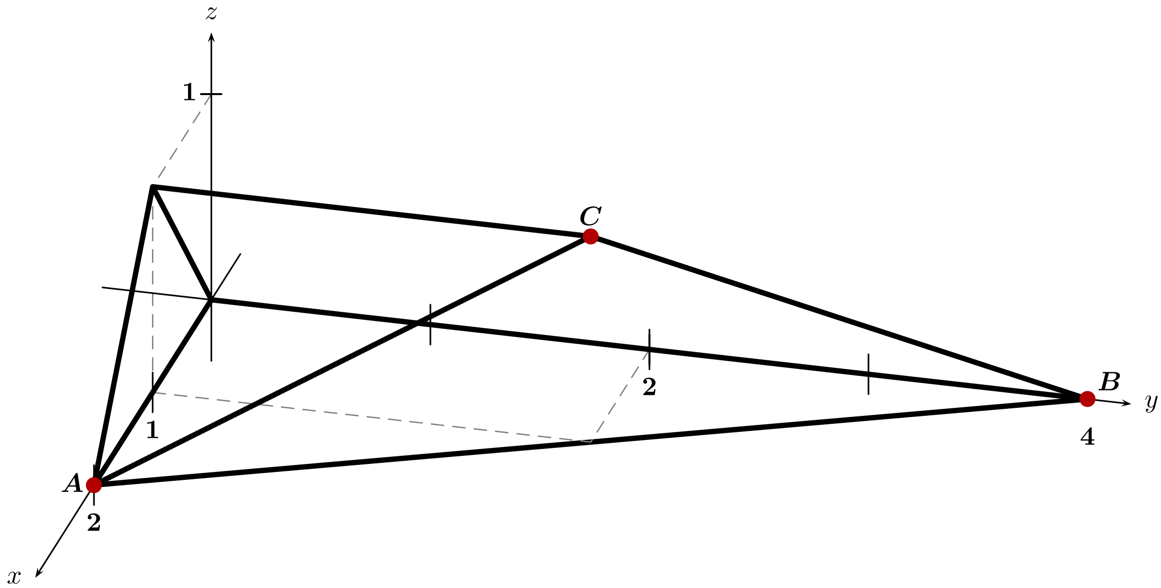
Partie III (Barème approximatif : 4 points)

On considère le volume $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + y \leq 4, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \text{ et } z \leq x \leq 2 - z\}.$$

1. Représenter ce volume sur la figure précédente.

Correction : Il suffit de projeter la surface Σ orthogonalement sur le plan d'équation $y = 0$:



2. À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oy), transformer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{4-2x} f(x,y,z)dy\right) dxdz = \int_0^1 \left(\int_z^{2-z} \left(\int_0^{4-2x} f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz$$

3. Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Correction :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ol(\mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} 1dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_z^{2-z} (4-2x)dx\right) dz \\ &= \int_0^1 \left[4x - x^2\right]_z^{2-z} dz \\ &= \int_0^1 (4-4z)dz = \left[4z - 2z^2\right]_0^1 = \boxed{2}. \end{aligned}$$

4. On note S le bord de $\mathcal{V}$. Déterminer le flux de $\vec{U}(x,y,z) = (y(2x+z), (1-y)^2, -z)$ à travers S par la méthode de votre choix.

Correction : Utiliser le théorème de Gauss-Ostrogradski. Avec le champ des normales unitaires dirigées vers l'extérieur, on a

$$Flux_S(\vec{U}) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{U}(x,y,z)\,dxdydz.$$

On a $\operatorname{div}\vec{U}(x,y,z) = 2y - 2(1-y) - 1 = -3 + 4y$.

$$
\begin{aligned}
Flux_S(\vec{U}) = \iiint_{\mathcal{V}} (-3+4y)dxdydz &= -3\mathcal{Vol}(\mathcal{V}) + 4\iiint_{\mathcal{V}} ydxdydz \\
&= -6 + 4\int_0^1 \left(\int_z^{2-z} \frac{(4-2x)^2}{2}dx\right)dz \\
&= -6 + 8\int_0^1 \left(\int_z^{2-z} (2-x)^2 dx\right)dz \\
&= -6 + 8\int_0^1 \Big[-\frac{(2-x)^3}{3}\Big]_z^{2-z} dz \\
&= -6 + \frac{8}{3}\int_0^1 (-z^3 + (2-z)^3)dz \\
&= -6 + \frac{2}{3}\Big[-z^4 - (2-z)^4\Big]_0^1 \\
&= -6 + \frac{2}{3} \times (-1 - 1 + 16) = \boxed{\frac{10}{3}}.
\end{aligned}
$$