Final MT22 - A2023

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

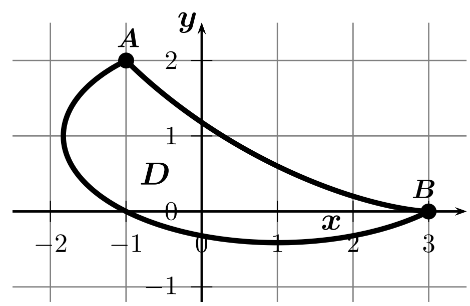
Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points - 1h)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ définies par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \ \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta + \cos(2\theta) \\ 2\sin\theta - \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1 \quad \text{et } x + 2y \leq 3.$$

et représenté graphiquement ci-contre.



1. (a) Montrer que pour tout point $M(x, y) \in \mathscr{C}_1$, on a $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 16\sin^2(\frac{3\theta}{2})$.

(b) En déduire la longueur $\ell(\mathscr{C}_1)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$.

(c) Montrer que pour tout point $M(x, y) \in \mathscr{C}_1$, on a $(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2 = 5 + 4\cos(3\theta)$.

(d) On oriente $\mathscr{C}_1$ de A vers B. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1} (x^2 + y^2)dy = -6 + \frac{4}{5}$.

2. Soit D_1 le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_1$ et le segment $[AB]$

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_1 sur la figure ci-dessus.

(b) Paramétrer le segment $[AB]$ orienté de B vers A.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_{\overrightarrow{BA}} (x^2 + y^2)dy = \frac{22}{3}$.

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\iint_{D_1} x \, dxdy$.

3. Soit $D_2 = D \cup D_1$.

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_2} f(x, y) \, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(b) On admet que $Aire(D_1) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}$. Déterminer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq z \leq 3 - x \text{ et } (x, y) \in D\}.$$

Formulaire :	$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\cos(n\theta)\cos(p\theta) = \frac{1}{2}\cos\big((n+p)\theta\big) + \frac{1}{2}\cos\big((n-p)\theta\big)$.
	$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\sin(n\theta)\sin(p\theta) = \frac{1}{2}\cos\big((n-p)\theta\big) - \frac{1}{2}\cos\big((n+p)\theta\big)$

Exercice 2 (Barème approximatif : 10 points - 1h)

Partie I - (Barème approximatif : 5 points - 30min)

On considère le solide Ω défini par :

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + z^2 \leq 1, \; y + 2z \geq 2 \; \text{ et } y \leq 2\}.$$

1. Faire une figure en perspective du solide Ω.

2. (a) Déterminer la projection D du solide Ω sur le plan $y = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oy), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

3. (a) Déterminer la projection D du solide Ω sur le plan $x = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

4. En déduire que le volume du solide Ω est $V(\Omega) = \frac{4}{3}$.

5. Calculer l'ordonnée du centre de gravité de Ω définie par $y_G = \dfrac{1}{V(\Omega)} \displaystyle\iiint_\Omega y\, dxdydz$.

Partie II - (Barème approximatif : 5 points - 30min)

Le bord $\mathcal{S}$ de Ω est constitué de trois faces, soit $\mathcal{S} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, définies comme suit :

$$\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + z^2 = 1 \; , \; y + 2z \geq 2 \text{ et } y \leq 2\}$$
$$\Sigma_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \; , \; y + 2z = 2 \text{ et } y \leq 2\}$$
$$\Sigma_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + z^2 \leq 1 \; , \; y = 2 \text{ et } z \geq 0\}.$$

1. (a) Paramétrer Σ_1 en coordonnées cylindriques.

(b) Déterminer le champ des normales à Σ_1 dirigé vers le haut.

(c) Calculer le flux de $\vec{W}(x + z, 2x + y, z - x)$ à travers Σ_1.

2. (a) Paramétrer Σ_2 à l'aide des variables x et y.

(b) Déterminer le champ des normales à Σ_2 dirigées vers le bas.

(c) Calculer l'aire de Σ_2.

(d) Calculer le flux de $\vec{W}$ à travers Σ_2.

3. Calculer de <u>deux façons</u> différentes, le flux de $\overrightarrow{W}$ à travers $\mathcal{S}$.