Nom : Prénom :

Final MT22 - A2024

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

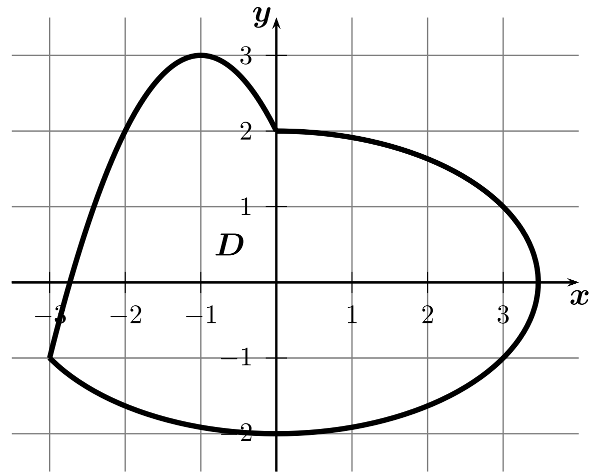
Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'extrémités $A(-3\,;-1)$ et $B(0\,;2)$ définies par

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{C}_1 \quad\Leftrightarrow\quad y+(x+1)^2=3 \text{ et } y\geq x+2$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{C}_2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{et } y\leq x+2.$$

et représenté graphiquement ci-contre.



1. (a) Paramétrer la courbe $\mathscr{C}_1$ orientée de B vers A.

Correction :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{C}_1 \Leftrightarrow \exists\, t:0\to-3\,,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\3-(1+t)^2\end{pmatrix}$$

(b) Paramétrer le segment $[AB]$ orienté de A vers B.

Correction :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in[\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \exists\, t:-3\to0\,,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\2+t\end{pmatrix}$$

(c) On considère le champ de vecteur $\vec{V}=\begin{pmatrix}-y\\(1+x)^2\end{pmatrix}$. Montrer que $\int_{\mathscr{C}_1}\vec{V}\cdot\vec{d\ell}+\int_{\overrightarrow{AB}}\vec{V}\cdot\vec{d\ell}=0$.

Correction :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}_1}\vec{V}\cdot\vec{d\ell}=\int_{\mathscr{C}_1}-ydx+(1+x)^2dy=&\int_0^{-3}(t^2+2t-2)\times1dt+(1+t)^2\times(-2(1+t))dt\\=&\Big[\frac{t^3}{3}+t^2-2t-\frac{(1+t)^4}{2}\Big]_0^{-3}\\=&(-9+9+6-8)-(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \vec{V}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\overrightarrow{AB}} -ydx+(1+x)^2dy = \int_{-3}^{0} -(2+t)\times 1dt + (1+t)^2\times 1dt$$
$$= \Big[-2t-\frac{t^2}{2}+\frac{(1+t)^3}{3}\Big]_{-3}^{0}$$
$$= \frac{1}{3}-\left(6-\frac{9}{2}-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

On en déduit $\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\overrightarrow{AB}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=0.$

(d) Soit D_1 le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_1$ et le segment $[AB]$. Justifier à l'aide d'un théorème intégral que $\displaystyle\iint_{D_1}(2x+3)dxdy=0.$

Correction : Soit $\mathscr{C}$ le bord de D_1 alors $\mathscr{C}$ est une courbe fermée et sans point double et $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1\cup[AB]$. Les paramétrisations de $\mathscr{C}_1$ et $[AB]$ aux questions **1a) et 1b)** ont été effectuées dans le sens trigonométriques. D'après le théorème de Green-Riemann on doit avoir

$$\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\mathscr{C}_1}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\overrightarrow{AB}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

avec $P(x,y)=-y$ et $Q(x,y)=(1+x)^2$. Or,

$$\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\mathscr{C}_1}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\overrightarrow{AB}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}==0$$

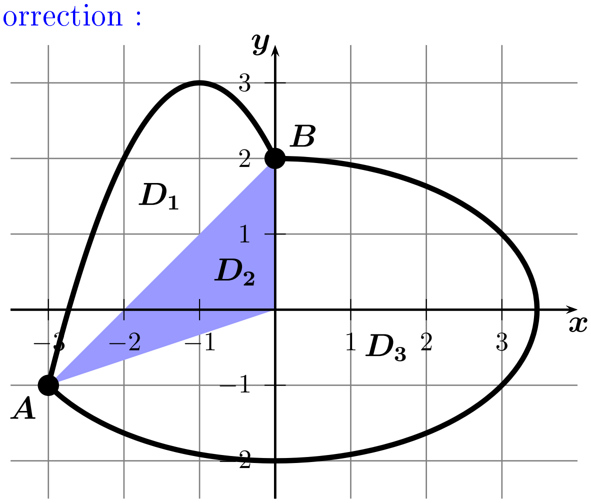
donc

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy=\iint_{D_1}(2x+3)\,dxdy=0$$

2. Soit $D_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y\le x+2,\ x\le 3y\ \text{ et }\ x\le 0\}$.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_2 sur la figure ci-dessus.

Correction :



(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.

(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

Correction : • 1ère formule de Fubini :

$$\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy = \int_{-3}^{0} \left(\int_{\frac{x}{3}}^{2+x} f(x,y)dy \right) dx.$$

• 2ème formule de Fubini avec un découpe en $y = 0$:

$$\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{y-2}^{3y} f(x,y)dx \right) dy + \int_{0}^{2} \left(\int_{y-2}^{0} f(x,y)dx \right) dy.$$

(c) Avec l'une des formules précédentes, montrer que $\iint_{D_2} (2x+3)\, dxdy = 3$.

Correction : En utilisant la 1ère formule de Fubini :

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} (2x+3)\, dxdy &= \int_{-3}^{0} \left(\int_{\frac{x}{3}}^{2+x} (2x+3)dy \right) dx = \int_{-3}^{0} (2x+3)(2+\tfrac{2x}{3})dx \\ &= \int_{-3}^{0} (6+6x+\frac{4x^2}{3})dx \\ &= \left[6x+3x^2+\frac{4x^3}{9}\right]_{-3}^{0} = 0-(-18+27-12) = 3.\end{aligned}$$

3. Soit $D_3 = D \backslash (D_1 \cup D_2)$

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_3} f(x,y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Le domaine D_3 est une portion d'ellipse de centre $(0,0)$ et de rayons $a = 2\sqrt{3}$ sur (Ox) et $b = 2$ sur (Oy). La paramétristaion est donc

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_3 \Leftrightarrow \exists\, (r,\theta) \in [0,1] \times [\alpha, \frac{\pi}{2}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}r\cos\theta \\ 2r\sin\theta \end{pmatrix}$$

et il reste à déterminer α qui est l'angle associé au point $A(-3,-1)$: on résout

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\theta = -3 \\ 2\sin\theta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{5\pi}{6} \mod 2\pi$$

Le jacobien est $J = abr = 4\sqrt{3}r$. D'où

$$\iint_{D_3} f(x,y)\, dxdy = \int_{0}^{1} \left(\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\sqrt{3}r\cos\theta, 2r\sin\theta) \times 4\sqrt{3}r\, d\theta \right) dr.$$

(b) En déduire que $\displaystyle\iint_D (2x+3)dxdy = 8\pi\sqrt{3}+27$.

Correction : D'après la relation de Chasles, on a

$$\iint_D (2x+3)dxdy = \iint_{D_1} (2x+3)dxdy + \iint_{D_2} (2x+3)dxdy + \iint_{D_3} (2x+3)dxdy$$

il reste donc à montrer que

$$\iint_{D_3} (2x+3)dxdy = 8\pi\sqrt{3}+24.$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_3} (2x+3)dxdy =& 4\sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r(4\sqrt{3}r\cos\theta+3)\,d\theta\right)dr\\ =& 4\sqrt{3}\int_0^1 \Big[r(4\sqrt{3}r\sin\theta+3\theta)\Big]_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dr\\ =& 4\sqrt{3}\int_0^1 (6\sqrt{3}r^2+4\pi r)\,dr = 4\sqrt{3}\Big[2\sqrt{3}r^3+2\pi r^2\Big]_0^1\\ =& 4\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2\pi) = 24+8\pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

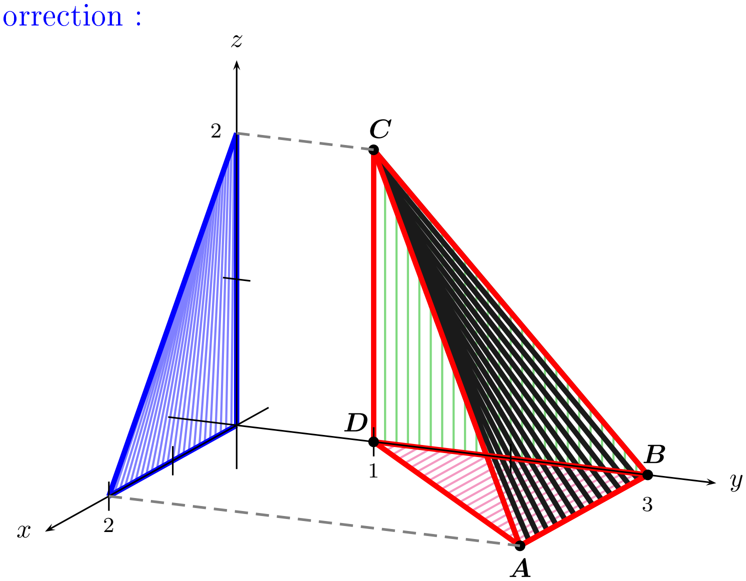
Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points - 35min)

Soient $A(2,3,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,1,2)$ et $D(0,1,0)$ quatres points dans l'espace.
On considère le tétraèdre de sommets $ABCD$ défini par :

$$\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ y+z\leq 3,\ y\geq 1+x \ \text{ et } x\geq 0, z\geq 0\}.$$

1. Faire une figure en perspective du tetraèdre Ω.

Correction :



2. (a) Déterminer la projection D du tetraèdre Ω sur le plan $x = 0$.

Correction : Il s'agit du domaine de définition des variables (y, z), soit triangle BCD hachuré en vert et caractérisé par les inéquations :

$$\boxed{y + z \leq 3,\ z \geq 0} \text{ et } 0 \leq x \leq y - 1 \Rightarrow \boxed{y \geq 1}$$

Avec une figure dans le plan orthonormé (yOz) on obtient :

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2\ 1 \leq y \leq 3 \text{ et } 0 \leq z \leq 3 - y.\}$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : Avec l'encadrement de la variable x : $\boxed{0 \leq x \leq y - 1}$, on obtient

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_1^3 \left(\int_0^{3-y} \left(\int_0^{y-1} f(x, y, z)dx \right) dz \right) dy.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $V(\Omega)$.

Correction :

$$\begin{aligned} V(\Omega) = \iiint_\Omega 1dxdydz &= \int_1^3 \left(\int_0^{3-y} (y - 1)dz \right) dy = \int_1^3 (3 - y)(y - 1)dy \\ &= \int_1^3 (-3 + 4y - y^2)dy \\ &= \Big[-3y + 2y^2 - \frac{y^3}{3} \Big]_1^3 = \underbrace{(-9 + 18 - 9)}_{=0} - (-3 + 2 - \tfrac{1}{3}) = \boxed{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

(b) Montrer que l'ordonnée du centre de gravité de Ω est $y_G = \dfrac{1}{V(\Omega)} \displaystyle\iiint_\Omega y\, dxdydz = 2.$

Correction :

$$\begin{aligned} y_G = \frac{3}{4} \iiint_\Omega ydxdydz &= \frac{3}{4} \int_1^3 \left(\int_0^{3-y} y(y - 1)dz \right) dy = \int_1^3 y(3 - y)(y - 1)dy \\ &= \int_1^3 (-3y + 4y^2 - y^3)dy = \Big[-\frac{3y^2}{2} + \frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big]_1^3 \\ &= \frac{3}{4} \Big((-\tfrac{27}{2} + 36 - \tfrac{81}{4}) - (-\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{4}) \Big) = \frac{3}{4} \left(\underbrace{-\frac{24}{2} + 36 - \frac{80}{4}}_{=4} - \frac{4}{3} \right) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

4. On note $\mathcal{S}$ le bord de Ω, orienté par le champ des normales unitaires $\vec{n}$ dirigé vers l'extérieur de Ω. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y + z = 3,\ y \geq 1 + x \text{ et } x \geq 0, z \geq 0\}$.

(a) À l'aide d'une paramétrisation de Σ par les variables (x,z), calculer le flux de $\vec{U}(x,y,z) = (x, y-1, \frac{yz}{2})$ à travers la face Σ.

Correction : La surface Σ est hachurée en noire sur la figure. Le champ des normales unitaires dirigé vers l'extérieur admet une deuxième et une troisième composante positive.

- paramétrisation : $$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists (x,z) \in \Delta, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3-z \\ z \end{pmatrix}$$

où Δ est la projection orthogonale de Σ sur le plan $y=0$ hachurée en bleue sir la figure.

$$\Delta = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, z \geq 0 \text{ et } \underbrace{3-z}_{=y} \geq 1+x\} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq z \leq 2 \text{ et } 0 \leq x \leq 2-z\}$$

- On calcul le champ des normales :

$$\vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On choisit $\boxed{\vec{N} = -\vec{t_x} \wedge \vec{t_z}}$. On a $\vec{U} \cdot \vec{N} = y-1+yz = (3-z)-1+\frac{z(3-z)}{2} = 2+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Flux}_\Sigma(\vec{U}) = \int_0^2 \left(\int_0^{2-z} (2+\tfrac{z}{2}-\tfrac{z^2}{2})dx \right) dz &= \int_0^2 (2-z)(2+\tfrac{z}{2}-\tfrac{z^2}{2})dz \\ &= \int_0^2 (4-z-\frac{3z^2}{2}+\frac{z^3}{2})dz \\ &= \left[4z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{8}\right]_0^2 = 8-2-4+2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

(b) Sans calcul intégral, justifier que le flux de $\vec{U}$ à travers les trois autres faces est nul.

Correction : Il suffit de justifer que $\vec{U} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$ sur les 3 autres faces.

- Sur la face située dans le plan $z=0$ on a $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{U} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$. Donc le flux est nul.
- Sur la face située dans le plan $x=0$ on a $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ y-1 \\ \frac{yz}{2} \end{pmatrix}$ donc $\vec{U} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$. DOnc le flux est nul.
- sur la face située dans le plan $y = x+1$, on a $\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{U} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+1) = 0$. Donc le flux est nul.

(c) Déduire des questions précédentes, et de deux façons différentes, que le flux de $\vec{U}$ à travers $\mathcal{S}$ est $\mathcal{Flux}_\mathcal{S}(\vec{U}) = 4$.

Correction : • Par relation de Chasles, le flux total à travers $\mathcal{S}$ est la somme des flux à travers chaque face donc il reste $\boxed{\mathcal{Flux}_{\mathcal{S}}(\vec{U}) = \mathcal{Flux}_{\Sigma}(\vec{U}) = 4}$.
• D'après le théorème de Gauss-Ostrogradski, on doit avoir

$$\mathcal{Flux}_{\mathcal{S}}(\vec{U}) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{U} dxdydz = \iiint_{\Omega} (2+\tfrac{y}{2}) dxdydz = V(\Omega)(2+\tfrac{y_G}{2}) = \frac{4}{3}\times 3 = \boxed{4}.$$

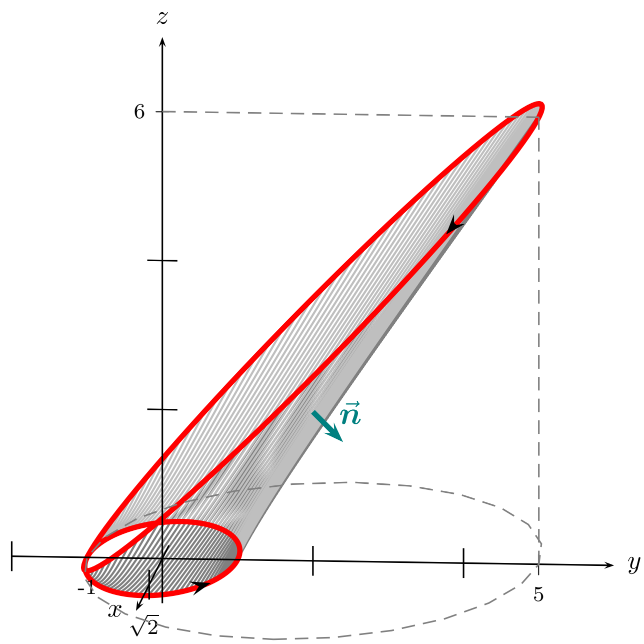
Exercice 3 (25min-Barème approximatif : 5 points)

On considère les courbes Γ_1 et Γ_2 de l'espace définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$\Gamma_1 := \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ et } z = 0,$$
$$\Gamma_2 := \quad x^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \text{et} \quad z = y + 1.$$

1. Faire une figure.

Correction :



2. Paramétrer les courbes Γ_1 et Γ_2, orientées dans le sens croissant du paramètre.

Correction :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \exists\, \theta : 0 \to 2\pi \ , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \exists\, \theta : 0 \to 2\pi \ , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 2+3\sin\theta \\ 3+3\sin\theta \end{pmatrix}$$

3. Soit $\vec{V}(x,y,z) = (\frac{z}{3}, x, 1)$. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \vec{V}\cdot d\vec{\ell}$ et $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \vec{V}\cdot d\vec{\ell}$.

Correction : • Comme $z = 0$ sur Γ_1, on a

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\Gamma_1} x dy = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cos\theta \times \cos\theta d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}$$

$$\bullet \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\Gamma_2} \frac{z}{3}\, dx + xdy + dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \sin\theta) \times (-3\sin\theta)\, d\theta + 3\cos\theta \times 3\cos\theta d\theta + 1 \times 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \left[3\cos\theta - 3\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right) + 9\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right) + 3\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 6\pi$$

4. On considère la surface $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 2y^2 - (z + 1)^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq y + 1\}$.

(a) Justifier que le bord de Σ est $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Correction : On étudie les coupes dans les plans $z = 0$ et $z = y + 1$.

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + y^2 = 1}$$

$$z = y+1 \Rightarrow x^2+2y^2-(y+2)^2 = 1 \Rightarrow x^2+2y^2-(y^2+4y+4) = 1 \Rightarrow x^2+(y^2-4y) = 5 \Rightarrow \boxed{x^2 + (y-2)^2 = 9}$$

(b) Sur la figure précédente, indiquer l'orientation des courbes Γ_1 et Γ_2 cohérente avec le champ des normales unitaires à la surface Σ faisant un angle obtu avec le demi-axe positif $[Oz)$.

Correction : voir figure.

(c) À l'aide d'un théorème intégral, exprimer le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}$, noté $\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V})$, en fonction de I_1 et I_2.

Correction : D'après la règle de la main droite, l'orientation du champ des normales vers le bas correspond au sens croissant du paramètre θ sur Γ_1 et au sens décroissant du paramètre θ sur Γ_2. D'après le théorème de Stokes-Ampère, on obtient

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}) = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} - \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$$