Médian MT22 - A2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-\alpha xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
3. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
4. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement $\alpha = -1$.
   (Indication : étudier bien les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$ pour démontrer l'équivalence.)
5. Pour quelle(s) valeur(s) de α, la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 (Barème approximatif : 4 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + y\sqrt{3} + 2\cos(x+y).$$

1. Déterminer le gradient de la fonction f .
2. En déduire le (ou les) point(s) critique(s) de f.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum, point selle).

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)
On rappelle les formules suivantes : pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiables, on a $\operatorname{div}(gA) = \nabla g \cdot A + g \operatorname{div} A$ et $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(gA) = \nabla g \wedge A + g\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}A$.

1. Soit V le champ de vecteurs défini sur $D = \left\{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1+x+y+z > 0\right\}$ par

$$V(x,y,z) = \frac{1}{1+x+y+z}\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que V dérive d'un potentiel vecteur $U : D \to \mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la fonction $\phi :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable, de sorte que

$$U(x,y,z) = \phi(x+y+z)\overrightarrow{OM} \text{ et } U(0,0,1) = \vec{0}.$$

2. Soit $W : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini par

$$W(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(yz) + \frac{y+\beta z}{x} \\ \ln(xz) + \frac{z+\beta x}{y} \\ \ln(xy) + \frac{x+\beta y}{z} \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ de sorte que W dérive d'un potentiel scalaire $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer la forme générale des fonctions f telles que $\nabla f = W$.

Exercice 4 (Barème approximatif : 6 points)
Soit S_1 et S_2 deux surfaces définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$(S_1) : \quad x^2 + y^2 = 2z^2 \qquad \text{et} \qquad (S_2) : \quad x + 1 = 2z.$$

Soit $\mathscr{C} = S_1 \cap S_2$ la courbe d'intersection des deux surfaces S_1 et S_2 et $M_0 = (1,1,1) \in \mathscr{C}$.

1. Déterminer un vecteur normal à la surface S_1 au point M_0.
2. En déduire l'équation du plan tangent à S_1 passant par M_0.
3. (a) Montrer que $\mathscr{C}$ peut également s'écrire comme l'intersection d'un cylindre elliptique d'axe de direction (Oz) et d'un plan.

   (b) En déduire les équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}$.
4. (a) Déterminer un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ au point M_0.

   (b) En déduire les équations paramétriques de la droite tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point M_0.