Médian MT22 - A2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

**Exercice 1** (Barème approximatif : 5 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-\alpha xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
   Correction : L'expression $\frac{x^3-\alpha xy^2}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est infiniment différentiable en tout point $(x_0, y_0)$ tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. On en déduit que $f$ est au moins de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. Montrer que la fonction $f$ est continue en $(0,0)$.
   Correction : On calcule $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$ :
   $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta - \alpha r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = r(\cos^3 - \alpha\cos\theta\sin^2\theta).$$
   Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a
   $$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| \leq r\underbrace{|\cos\theta|^3}_{\leq 1} + |\alpha|\underbrace{|\cos\theta\sin^2\theta|}_{\leq 1} \leq r(1+|\alpha|),$$
   car $\operatorname{Im}\cos = \operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r(1+|\alpha|)$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0,0)$ est démontrée.
3. Déterminer les dérivées partielles premières de $f$ en $(0,0)$.
   Correction : • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{\frac{h^3-\alpha\times h\times 0^2}{h^2} - 0}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1 \underset{h\to 0}{\to} 1$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$.
   • $\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \dfrac{\frac{0^3-\alpha\times 0\times k^2}{k^2} - 0}{k} = 0 \underset{k\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.
4. Montrer que $f$ est différentiable en $(0,0)$ si et seulement $\alpha = -1$.
   *(Indication : étudier bien les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$ pour démontrer l'équivalence.)*
   Correction : On écrit
   $$f(h,k) = f(0,0) + 1\times h + 0\times k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k).$$

On a donc pour tout $(h,k) \neq (0,0)$, $\varepsilon(h,k) = \dfrac{\frac{h^3-\alpha hk^2}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{-(\alpha+1)hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$. On pose également $\varepsilon(0,0)=0$.
• Si $\alpha = -1$ alors pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}$, on a $\varepsilon(h,k) = 0$ (càd que la fonction est identiquement nulle). On a donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$. La fonction $f$ est donc différentiable en $(0,0)$.
• Si $\alpha \neq -1$ alors on prend le chemin $x=y$ et on pose pour $t \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \Phi(0) = (0,0).$$

On étudie la composée

$$\varepsilon \circ \Phi(t) = \varepsilon(t,t) = -(1+\alpha)\frac{t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} -(1+\alpha)\frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } t>0 \\ (1+\alpha)\frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } t<0 \end{cases}$$

Les limites à gauche et à droite, quand $t \to 0$ sont différentes de $\varepsilon(0,0)=0$. Cela signifie que la fonction $\varepsilon \circ \Phi$ n'est pas continue en $(0,0)$. Comme $\Phi$ est continue en $t=0$, on en déduit que $\varepsilon$ n'est pas continue en $(0,0)$ et que la fonction $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

5. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$, la fonction $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?
Correction : • Par contraposée d'une propriété du cours, si $\alpha \neq -1$ alors $f$ ne peut pas être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
• Si $\alpha = -1$ alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x$. Il s'agit d'une fonction polynômiale donc $f$ est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2** (Barème approximatif : 4 points)
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + y\sqrt{3} + 2\cos(x+y).$$

1. Déterminer le gradient de la fonction $f$ .
Correction : Par somme et composition de fonction $\mathscr{C}^\infty$, $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On peut donc calculer son gradient et ses dérivées partielles secondes en tout point.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2\sin(x+y) \\ \sqrt{3} - 2\sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le (ou les) point(s) critique(s) de $f$.
Correction : Les points critiques sont les solutions du système $\nabla f(x,y) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} 2x &= 2\sin(x+y) \\ \sqrt{3} &= 2\sin(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= \sqrt{3} \\ \sqrt{3} &= 2\sin(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{3}+2k\pi &= x+y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi &= x+y \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il y a une infinité de points critiques de la forme $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ ou $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$.

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de $f$.

   Correction : Grâce au théorème de symétrie de Schwarz, on calcule seulement 3 dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 2\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\cos(x+y)$$

   et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2\cos(x+y).$$

4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum, point selle).

   Correction : • Pour les points critiques $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, on a $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$ donc $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ et

$$\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times (-1) = 2 > 0.$$

   Ce sont des points selles.

   • Pour les points critiques $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$, on $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$ donc $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ et

$$\Delta = b^2 - ac = 1^2 - 3 \times 1 = -2 < 0.$$

   Comme $a > 0$, il s'agit de minimum locaux.

**Exercice 3** (Barème approximatif : 5 points)

On rappelle les formules suivantes : pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiables, on a $\operatorname{div}(gA) = \nabla g \cdot A + g \operatorname{div} A$ et $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(gA) = \nabla g \wedge A + g\, \overrightarrow{\mathbf{rot}} A$.

1. Soit $V$ le champ de vecteurs défini sur $D = \left\{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x + y + z > 0\right\}$ par

$$V(x,y,z) = \frac{1}{1+x+y+z} \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $V$ dérive d'un potentiel vecteur $U : D \to \mathbb{R}^3$.

   Correction : Le champ de vecteur $V$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $D$ donc on vérifie le critère $\boxed{\operatorname{div} V = 0}$ à l'aide de la formule ci-dessus. On pose $\tilde{g}(x,y,z) = \frac{1}{1+x+y+z}$ et $A(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$. On calcule

$$(\nabla \tilde{g})(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \\ -\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \\ -\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{div} A(x,y,z) = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} V(x,y,z) =&(\nabla\tilde{g})(x,y,z)\cdot A(x,y,z)+\tilde{g}(x,y,z)\underbrace{\operatorname{div} A(x,y,z)}_{=0}\\
=&-\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y-z\\z-x\\x-y\end{pmatrix}\\
=&-\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big(y-z+z-x+x-y\Big)=0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le champ de vecteur $V$ dérive bien d'un potentiel vecteur $U : D\to\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la fonction $\phi : ]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ de sorte que

$$U(x,y,z)=\phi(x+y+z)\overrightarrow{OM} \text{ et } U(0,0,1)=\vec{0}.$$

Correction : Cela signifie que $U$ et $V$ sont liés par la relation $\boxed{V=\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,U}$. Calculons $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,U$ à l'aide de la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,U(x,y,z)=&\phi'(x+y+z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{OM}+\phi(x+x+z)\underbrace{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{OM}}_{=\vec{0}\text{ vu en cours}}\\
=&-\phi'(x+y+z)\begin{pmatrix}y-z\\z-x\\x-y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \phi'(x+y+z)=-\frac{1}{1+x+y+z}$. Cela est équivalent à écrire

$$\forall t>-1, \phi'(t)=-\frac{1}{1+t}.$$

On en déduit que $\forall t>-1, \boxed{\phi(t)=-\ln(1+t)+C}$. Et la condition initiale indique que

$$\phi(0+0+1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow -\ln(2)+C=0\Rightarrow \boxed{C=-\ln 2}.$$

2. Soit $W:(\mathbb{R}_+^*)^3\to\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini par

$$W(x,y,z)=\begin{pmatrix}\ln(yz)+\frac{y+\beta z}{x}\\ \ln(xz)+\frac{z+\beta x}{y}\\ \ln(xy)+\frac{x+\beta y}{z}\end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $\beta\in\mathbb{R}$ de sorte que $W$ dérive d'un potentiel scalaire $f:(\mathbb{R}_+^*)^3\to\mathbb{R}$.

Correction : Le champ de vecteur $W$ dérive d'un potentiel scalaire si la condition $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, W = \vec{0}$ est vérifiée.

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, W(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \ln(yz) + \frac{y+\beta z}{x} \\ \ln(xz) + \frac{z+\beta x}{y} \\ \ln(xy) + \frac{x+\beta y}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{y} + \frac{\beta}{z}) - (\frac{1}{z} + \frac{1}{y}) \\ (\frac{1}{z} + \frac{\beta}{x}) - (\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) \\ (\frac{1}{x} + \frac{\beta}{y}) - (\frac{1}{y} + \frac{1}{x}) \end{pmatrix} = (\beta - 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

On conclut que

$$\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\, W(x,y,z) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta = 1}.$$

(b) Déterminer la forme générale des fonctions $f$ telles que $\nabla f = W$.
Correction : Tout d'abord, l'équation admet une solution ssi $\beta = 1$. On pose alors le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \ln(yz) + \frac{y+z}{x} & (L_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \ln(xz) + \frac{z+x}{y} & (L_2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \ln(xy) + \frac{x+y}{z} & (L_3) \end{cases}$$

$$(L_1) \Rightarrow f(x,y,z) = \int \left( \ln(yz) + \frac{y+z}{x} \right) dx = x\ln(yz) + (y+z)\ln(x) + C_1(y,z)$$

On dérive par rapport à $y$ et on identifie à $(L_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x \times \frac{1}{y} + \ln(x) + \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)$$

Comme $\ln(xz) = \ln x + \ln z$, on a

$$(L_2) \Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = \frac{z}{y} + \ln z \Rightarrow C_1(y,z) = \int \left( \frac{z}{y} + \ln z \right) dz = z\ln y + y\ln z + C_2(z).$$

On récapitule

$$f(x,y,z) = x\ln(yz) + (y+z)\ln(x) + z\ln y + y\ln z + C_2(z).$$

On dérive par rapport à $z$ et on indentifie à $L_3$.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x}{z} + \ln(x) + \ln(y) + \frac{y}{z} + C_2'(z)$$

$$(L_3) \Rightarrow C_2'(z) = 0 \Rightarrow C_2(z) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la forme générale des solutions est

$$\boxed{f(x,y,z) = x\ln(yz) + y\ln(xz) + z\ln(xy) + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 4** (Barème approximatif : 6 points)
Soit $S_1$ et $S_2$ deux surfaces définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$(S_1): \quad x^2 + y^2 = 2z^2 \qquad \text{et} \qquad (S_2): \quad x + 1 = 2z.$$

Soit $\mathscr{C} = S_1 \cap S_2$ la courbe d'intersection des deux surfaces $S_1$ et $S_2$ et $M_0 = (1, 1, 1) \in \mathscr{C}$.

1. Déterminer un vecteur normal à la surface $S_1$ passant par le point $M_0$.
   Correction : La surface $S_1$ est définie à partir de l'équation implicite
   $$f(x, y, z) = 2z^2 - x^2 - y^2 = 0.$$
   Un vecteur normal est donc donné par le gradient $\overrightarrow{N_1} = \nabla f(M_0)$. On a $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 4z \end{pmatrix}$. Donc un vecteur normal est $\overrightarrow{N_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. En déduire l'équation du plan tangent à $S_1$ passant par $M_0$.
   Correction : On en déduit qu'un point $M(x, y, z)$ appartient au plan tangent si
   $$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
   Après simplification, on obtient $\boxed{x + y - 2z = 0}$.
3. (a) Montrer que $\mathscr{C}$ peut également s'écrire comme l'intersection d'un cylindre elliptique d'axe de direction $(Oz)$ et d'un plan.
   Correction : A l'aide de l'équation implicite de $S_2$, on obtient que $4z^2 = (x+1)^2$. On pose alors l'égalité
   $$2x^2+2y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+2y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+2y^2 = 2.$$
   On normalise l'équation pour déterminer les caractéristiques du cylindre : $\boxed{\frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1}$.
   Il s'agit d'un cylindre elliptique d'axe parallèle à $(Oz)$ passant par le point $(1, 0, 0)$. Chaque section du cylindre par un plan perpendiculaire à $(Oz)$ est une ellipse de rayons $\frac{1}{2}$ et 1 sur les axes de direction $(Ox)$ et $(Oy)$ respectivement.

   (b) En déduire les équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}$.
   Correction : La courbe $\mathscr{C}$ peut être définie par les équations implicites suivantes :
   $$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1 \\ x + 1 = 2z \end{cases}$$
   Une paramétrisation de la courbe $\mathscr{C}$ est donc
   $$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

4. (a) Déterminer un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ au point $M_0$.

Correction : Tout d'abord, on trouve que $M_0 = \Phi(\frac{\pi}{2})$. Un vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en $M_0$ est $\vec{v} = \Phi'(\frac{\pi}{2})$. On calcule

$$\Phi'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

**NB** : On remarque que $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, où $\overrightarrow{N_2}$ est un vecteur normal au plan $S_2$.

(b) En déduire les équations paramétriques de la droite tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point $M_0$.

Correction : Les équations paramétriques de la tangentes sont

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - \lambda\sqrt{2} \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 - \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right., \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$