Médian MT22 - A2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{et} \qquad f_2(x,y) = x\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}).$$

1. Montrer que la fonction f_1 est continue en $(0,0)$.
2. (a) La fonction f_1 admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
   (b) Justifier que f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Déterminer les dérivées partielles premières de f_2 en $(x,y) \neq (0,0)$.
4. Justifier que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 0$.
5. Montrer que la fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - \lambda y^2).$$

1. Déterminer le gradient de la fonction f .
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors la fonction f admet deux points critiques à préciser.

   Dans la suite on pose $\boldsymbol{\lambda = 3}$.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum ou point selle).

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres. Soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins et **paire**.
On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y \neq z\}$ par

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \alpha xy + z^3 \\ x^2 - z\varphi(y-z) \\ \beta x z^2 + y\varphi(y-z) \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{V}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que

   $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha_0\ , \quad \beta = \beta_0 \quad \text{et } \forall\, t > 0,\ t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0,$$

   où α_0 et β_0 sont deux réels à préciser.
2. Déterminer la forme générale des fonctions φ de sorte que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
3. Déterminer la forme générale des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ telles que $\vec{V} = \nabla f$.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} \leq 1 \;\; \text{et} \;\; x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

1. Faire une figure.
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Formulaire : on rappelle que la forme générale des solutions d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

est

$$y(t) = Ce^{A(t)},$$

où A est une primitive de a à déterminer et $C \in \mathbb{R}$ est une contante réelle quelconque.