Médian MT22 - A2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

On appelle sinus cardinal, la fonction définie pour $t \neq 0$ par $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$.
Soit α un paramètre et f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1 + \alpha y(x+y^2) - \operatorname{sinc}(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = \frac{1}{6} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Young de la fonction sinc à l'ordre 3 en $a = 0$: il existe une fonction ε telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{sinc}(t) = 1 - \frac{t^2}{6} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \text{ et } |\varepsilon(t)| \leq \frac{|t|}{120}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$.
   (Indication : étudier les cas $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha \neq \frac{1}{3}$ pour démontrer l'équivalence.)
2. Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
3. Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(x,y) = xy + \cos(x+2y) - \dfrac{x^2}{4} - y^2$.

1. Calculer le gradient de f.
2. Montrer que les points critiques (x_0, y_0) de f vérifient $x_0 = 2y_0$, puis les déterminer.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f.
4. En déduire la nature des points critiques identifiés à la question **2.** *(minimum, maximum ou point selle).*

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)

Soit V le champ de vecteurs défini sur $D = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ par $\vec{V}(x,y,z) = g(z) \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2} + z^2 \\ xy \\ xz \end{pmatrix}$ où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
(Un formulaire est proposé au dos de la feuille.)

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{U} : D \to \mathbb{R}^3$ si et seulement si

   $$(**) \qquad \forall z > 0,\ zg'(z) + 2g(z) = 0.$$

2. Déterminer la fonction g satisfaisant $(**)$ ainsi que la condition initiale $g(1) = 1$.
3. Déterminer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), 0\big)$ tel que $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{U} = \vec{V}$ et $\operatorname{div}\vec{U}(x,y,z) = 2x + e^y$. *(On ne demande pas l'ensemble des solutions possibles.)*

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{(x-1)^2}{4} + 4y^2 \leq 1 \ \text{ et } \ 1 + x + 4y \leq 0 \right\}.$$

1. Faire une figure.
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(0, -\frac{\sqrt{3}}{4}) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Formulaire : ① On rappelle les formules suivantes : pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiables, on a $\operatorname{div}(gA) = \nabla g \cdot A + g \operatorname{div} A$ et $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(gA) = \nabla g \wedge A + g\,\overrightarrow{\mathbf{rot}} A$.

② On rappelle que la forme générale des solutions d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

est

$$y(t) = Ce^{A(t)},$$

où A est une primitive de a à déterminer et $C \in \mathbb{R}$ est une contante réelle quelconque.