

Exercice 1. (3 points) Soit c une constante réelle. On considère l'équation suivante, dite équation de transport :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = c \frac{\partial f}{\partial x}(t, x). \quad (1)$$

On suppose désormais que $f(t, x) = a(x + h(t))$ où a et h sont des fonctions dérivables. De plus, on suppose que $h(0) = 0$.

- Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction des dérivées premières de a et h .

Corrigé (2 pts) : On a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = h'(t)a'(x + h(t))$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = a'(x + h(t)).$$

- Trouver la fonction h pour que f soit une solution de l'équation de transport (1), pour toute fonction a .

Corrigé (1 pt) : Si f est une solution de (1), alors on obtient que $h'(t) = c$. Cela implique que $h(t) = ct + K$. Vu que $h(0) = 0$ on déduit que $h(t) = ct$.

Exercice 2. (4 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}, \quad \text{pour tout } 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

- Déterminer les points critiques de f .

Indication : On pourra utiliser $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Corrigé (2 pts) : On résout le système $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. À savoir

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0.$$

On soustrait les deux équations on obtient

$$\frac{(1-y)^2 - (1-x)^2}{(1-x)^2(1-y)^2} = \frac{(2-x-y)(x-y)}{(1-x)^2(1-y)^2} = 0.$$

Puisque $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, on sait que $0 < x + y < 2$, donc $x = y$. Cela qui implique que $(1-x)^2 = 4x^2$ et par conséquent $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$. Vu que $0 < x < 1$, on déduit que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est le seul point critique.

- Étudier la nature de ces points ?

Corrigé (2 pts) : On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2}{(x+y)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}.$$

D'où

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}$$

On remarque que $\Delta = 4(b^2 - ac) = \frac{27^2}{4} - 27^2 < 0$ et car $a > 0$, on déduit que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un point de minimum.

Exercice 3. (5,5 points)

1. Le théorème de Taylor-Young assure qu'une fonction g deux fois dérivables vérifie la formule suivante :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Soit $g(x) = e^x$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$, au voisinage de 0.

Corrigé (1 pt) : On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

- (a) La fonction f est-elle continue au point $(0, 0)$?

Corrigé (1 pt) : On considère les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. On peut vérifier que

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{e^{r^2} - 1}{r^2}.$$

Ce qui prove, d'après le développement limité de e^x , que

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{r^2} - 1}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r^2} = 1 = f(0, 0).$$

Alors f est continue en $(0, 0)$.

- (b) Les dérivées partielles premières de f existent-elles au point $(0, 0)$?

Corrigé (1 pt) : Par la définition des dérivées partielles et en utilisant toujours le développement limité de e^x , on peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1 - h^2}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{2h^3} = 0.$$

De même, on peut prouver que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- (c) La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$?

Corrigé (1 pt) : Il suffit de calculer la limite suivante

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \epsilon(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{e^{h^2+k^2} - 1 - h^2 - k^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On passe en coordonnées polaires, on obtient que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \epsilon(h, k) = \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{r^2} - 1 - r^2}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4}{2r^3} = 0.$$

Donc f est différentiable en $(0, 0)$.

- (d) Les dérivées partielles de f sont-elles continues au point $(0, 0)$?

Corrigé (1,5 pts) : On peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2+y^2)e^{x^2+y^2} - 2x(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

De plus, si on considère les coordonnées polaires, on peut vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{2r^2 \cos(\theta)e^{r^2} - 2 \cos(\theta)(e^{r^2} - 1)}{r^3}.$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta)(2 + 2r^2 + r^4) - \cos(\theta)(2r^2 + r^4)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} (r+r^3) \cos(\theta) = 0,$$

car $|\cos(\theta)| \leq 1$. Cela montre que la dérivée partielle de f par rapport à x , est continue en $(0, 0)$. De même façon on peut montrer que la dérivée partielle de f par rapport à y , est aussi continue en $(0, 0)$.

Exercice 4. (6 points) Soient α et β deux constantes réelles. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V} = (y + \beta x, x - 2y + 2\alpha z, 2\beta y + \alpha z).$$

1. Sous quelles conditions portant sur α et β le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire.

Corrigé (1 pt) : \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus, on a $\mathbf{rot}(\vec{V}) = (2(\beta - \alpha), 0, 0)$ et par conséquent $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ ssi $\beta = \alpha$.

2. On suppose que \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire f telle que $f(0, 0, 0) = -1$ et $f(1, 1, 1) = 1$. Calculer, dans ce cas, f , α et β .

Corrigé (2 pts) : Dans ce cas, on sait que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$, donc $\beta = \alpha$. On cherche maintenant une fonction f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y + \alpha x \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x - 2y + 2\alpha z \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2\alpha y + \alpha z \quad (3)$$

On intègre l'équation (1) par rapport à x , on obtient

$$f(x, y, z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 + g(y, z).$$

On dérive cette équation par rapport à y , on déduit, par l'équation (2), que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = -2y + 2\alpha z.$$

Cela montre que $g(y, z) = -y^2 + 2\alpha zy + h(z)$ et par conséquent

$$f(x, y, z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 - y^2 + 2\alpha zy + h(z).$$

Finalement, on dérive cette équation par rapport à z , on déduit, par l'équation (3), que $h'(z) = \alpha z$. Alors $h(z) = \frac{\alpha}{2}z^2 + c$, d'où

$$f(x, y, z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 - y^2 + 2\alpha zy + \frac{\alpha}{2}z^2 + c.$$

De plus, puisque $f(0, 0, 0) = -1$ et $f(1, 1, 1) = 1$, on obtient que $c = -1$ et $\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Pour quelles valeurs de α et β le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur ?

Corrigé (1 pt) : D'après la première question, on sait que \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire ssi $\alpha = \beta$. De plus, si \vec{V} dérive d'un potentiel vecteur on a $\mathbf{div}(\vec{V}) = 0$, donc $\beta + \alpha = 2$. Cela montre que $\alpha = \beta = 1$.

4. On se place dans le cas précédent et on suppose que $\vec{V} = \mathbf{rot}(\vec{U})$ avec

$$\vec{U} = (-g(y) + z\phi(x, y), -z\psi(x, y), -2zx) \quad \text{où} \quad g(0) = 0.$$

Déterminer la forme générale des fonctions g , ψ et ϕ . En déduire la forme de \vec{U} .

Corrigé (2 pts) : Dans ce cas, on sait que $\alpha = \beta = 1$. On commence à calculer

$$\mathbf{rot}(\vec{U}) = \left(\psi(x, y), 2z + \phi(x, y), -z\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y) - z\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) + g'(y) \right).$$

D'où

$$\psi(x, y) = y + x \quad (1)$$

$$2z + \phi(x, y) = x - 2y + 2z \quad (2)$$

$$-z\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y) - z\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) + g'(y) = 2y + z \quad (3).$$

D'après (1) et (2), on a $\psi(x, y) = y + x$ et $\phi(x, y) = x - 2y$. On remplace cela dans (3), on obtient que $g'(y) = 2y$, alors $g(y) = y^2$ car $g(0) = 0$.

Exercice 5. (3,5 points)

1. Soient π_1 et π_2 les plans suivant :

$$\pi_1 : x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad \pi_2 : ax - y - z = 1,$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Trouver un vecteur normal \vec{N}_1 à π_1 et un vecteur normal \vec{N}_2 à π_2 .

Corrigé (0.5 pt) : On utilise l'équation cartésienne de π_1 et de π_2 , on déduit que

$$\vec{N}_1 = (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{N}_2 = (a, -1, -1).$$

- (b) Pour quelle valeur de a , π_1 et π_2 sont colinéaires. Justifier votre réponse.

Corrigé (0.5 pt) : Si π_1 et π_2 sont colinéaires, alors les deux vecteurs normaux \vec{N}_1 et \vec{N}_2 sont colinéaires. Par conséquent $\vec{N}_2 = \alpha\vec{N}_1$, d'où $\alpha = -1$ et $a = -1$.

- (c) Pour quelle valeur de a , π_1 et π_2 sont orthogonaux. Justifier votre réponse.

Corrigé (0.5 pt) : Si π_1 et π_2 sont orthogonaux, alors \vec{N}_1 et \vec{N}_2 sont orthogonaux. Par conséquent $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$, donc $a = 2$.

- (d) Est-il possible d'avoir $\pi_1 = \pi_2$. Justifier votre réponse.

Corrigé (0.5 pt) : Le plan π_1 ne peut pas coïncider avec π_2 , car si on prend dans ce cas $x = 0$, on obtient $y + z = 1$ et $-y - z = 1$. Ce qui implique que $1 = -1$ et c'est qui est impossible.

2. On suppose désormais que π_1 et π_2 ne sont pas colinéaires et on note la droite D l'intersection entre π_1 et π_2 .

(a) Trouver un vecteur directeur \vec{V} de D .

Corrigé (0,5 pt) : Étant donné que \vec{N}_1 est orthogonal à D et \vec{N}_2 est orthogonal à D , un vecteur directeur de D est

$$\vec{V} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = (0, 1 + a, -1 - a).$$

(b) Trouver un point particulier M_0 de D .

Corrigé (0,5 pt) : On considère le cas particulier $z = 0$, on obtient $x + y = 1$ et $ax - y = 1$. Cela montre que $x = \frac{2}{1+a}$ et $y = \frac{-1+a}{1+a}$. D'où $M_0 = (\frac{2}{1+a}, \frac{-1+a}{1+a}, 0)$.

(c) En déduire une équation paramétrique de D .

Corrigé 0,5 pt : Une équation paramétrique de D , est

$$D : \begin{cases} x = \frac{2}{1+a} \\ y = (1+a)t + \frac{-1+a}{1+a} \\ z = -(1+a)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$