Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2018- Final **Durée : 2h00.** Indiquer clairement le numéro de votre groupe Les documents et calculatrices sont interdits La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (10 points)

1. Soient a et b deux réels positifs ($a \neq b$). On considère le domaine défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

   (a) Représenter graphiquement D.

   (b) Calculer la masse totale de D en supposant que la masse surfacique est $\mu(x, y) = x$.

   (c) Soit γ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique. Calculer de 2 façons différentes la circulation de $\vec{V} = \left(0, \frac{x^2}{2}\right)$ le long de la courbe γ.

   (d) On suppose que la masse surfacique de D est constante et égale à 1, donner les coordonnées du centre de gravité de D.

2. Soit $\mathcal{V}$ le volume de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

   (b) Montrer que

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{3/2} dt = \frac{3\pi}{8}.$$

   Indication : On pourra faire le changement de variable $t = \sin(\theta)$.

   (c) Exprimer $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dxdydz$ à l'aide d'intégrales simples en x, en y et en z, en utilisant des bâtons parallèles à $\vec{Ox}$.

   (d) Calculer la masse totale de $\mathcal{V}$ en supposant que la masse volumique est $\mu(x, y, z) = x$.
   Indication : On pourra utiliser les résultats de la question 2-(b).

   (e) Retrouver le résultat précédent en utilisant un changement de variables, précisez bien le domaine de variation des nouvelles variables.

   (f) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

   (g) Soient Σ la surface limitant $\mathcal{V}$, orientée suivant la normale extérieure et $\vec{W} = (0, x, xz)$. Déterminer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), le flux de $\vec{W}$ à travers Σ.

   (h) En déduire le flux de $\vec{W}$ à travers

$$\Sigma_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Exercice 2. (4 points)

1. Soient $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f(x, y) = x^y$.

   (a) Calculer

$$I_1 = \int\int_D f(x, y) dxdy.$$

   (b) En exprimant de deux manières I_1, déterminer la valeur de

$$J_1 = \int_0^1 \frac{t - 1}{\ln(t)} dt.$$

2. Soient $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = \dfrac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ et $g(x, y) = \dfrac{x}{(1 + x^2)(1 + yx)}$.

Tournez la page SVP.

(a) Trouver les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad \int \frac{t}{1+t^2}dt.$$

(b) Calculer

$$I_2 = \int\int_D f(x,y)dxdy.$$

(c) Montrer que $g(x,y) + g(y,x) = f(x,y)$. En déduire, après avoir interverti les rôles de x et y, la valeur de

$$J_2 = \int\int_D g(x,y)dxdy.$$

(d) Exprimer J_2 en fonction de l'intégrale suivante :

$$K_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt.$$

En déduire la valeur de K_2.

Exercice 3. (6 points)

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction deux fois différentiables avec des dérivées partielles d'ordre 2 continues, vérifiant :

$$\Delta f(x,y) = 0.$$

On définit, pour tout $R > 0$, le domaine suivant :

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\right\}$$

et on note

$$\phi(R) = \int_0^{2\pi} f(R\cos(\theta) + x_0, R\sin(\theta) + y_0)d\theta.$$

(a) Exprimer l'intégrale suivante :

$$I_0 = \int\int_{D_{R_0}} f(x,y)dxdy,$$

en fonction d'une intégrale simple faisant intervenir $\phi(R)$.

(b) Soient $\vec{V} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ et $\mathcal{C}_R$ le bord de D_R orienté dans le sens trigonométrique. Calculer, en utilisant le théorème de Green-Riemann, la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}_R$.

(c) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}_R$.

(d) Exprimer la circulation $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}_R$ en fonction de $\phi'(R)$.

(e) En déduire une expression de $\phi(R)$.

(f) Quelle est la valeur de I_0 ?

2. On considère deux fonctions g et h définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface (S) orientée suivant la normale unitaire extérieure $\vec{n}$. On note

$$I_1 = \int\int_S g\ \vec{\text{grad}}(h).\vec{n}\ d\sigma \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_S h\ \vec{\text{grad}}(g).\vec{n}\ d\sigma$$

(a) Montrer que pour toute fonction $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et pour tout champ de vecteurs $\vec{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on a

$$\text{div}(\psi\vec{U}) = \psi\ \text{div}(\vec{U}) + \vec{\text{grad}}(\psi) \cdot \vec{U}.$$

(b) Soit $\vec{W} = g\ \vec{\text{grad}}(h) - h\ \vec{\text{grad}}(g)$. Exprimer $\text{div}(\vec{W})$ en fonction de g, h, Δg et Δh.

(c) Montrer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), que si $\Delta g = \Delta h = 0$ alors $I_1 = I_2$.

Rappel

1. Divergence : Soit $\vec{U}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Alors, on définit la divergence $\vec{U}$, comme suit
$$\mathrm{div}(\vec{U}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$
2. Masse totale et centre de gravité :
   (a) Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique $\mu(x,y)$, alors la masse totale de D est
   $$m = \int\int_D \mu(x,y)dxdy.$$
   De plus, le centre de gravité de D est $G = (x_G, y_G)$ avec
   $$x_G = \frac{1}{m}\int\int_D x\mu(x,y)dxdy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{m}\int\int_D y\mu(x,y)dxdy.$$
   (b) Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique $\mu(x,y,z)$, alors la masse totale de $\mathcal{V}$ est
   $$m = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mu(x,y,z)dxdydz.$$
3. Masse d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \le t \le t_1$ de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors la masse totale de Γ est donnée par formule suivante :
$$l = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$
4. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors
$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$
5. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ. Si Γ est orienté dans le même sens que Σ, alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on a
$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{V}).\vec{n}\, d\sigma.$$
6. Formule de Gauss-Ostrogradski : Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface (S). Si (S) est orientée suivant la normale extérieure, alors
$$\int\int_S \vec{V}.\vec{n}\, d\sigma = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{V})dxdydz.$$