Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2024- Final **Durée : 2h00.** Les documents et calculatrices sont interdits La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (10 points)

1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x + 4,\ x^2 + (y - 2)^2 \geq 4\right\}.$$
   (a) Faire une figure représentant D.
   (b) Expliciter de deux façons différentes $\displaystyle\int\int_D f(x, y)dxdy$ à l'aide d'intégrales simples en x et en y.
2. Soit $\mathcal{V}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ constitué des points situés à l'extérieur du cylindre d'axe $(x = 0, y = 2)$, de rayon 2 et qui vérifient $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x + 4,\ 0 \leq z \leq x$.
   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.
   (b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
3. On définit
$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x + 4,\ y \leq 2\right\},$$
   et $D_2 = D_1 \backslash D$ (D_1 privé de D).
   (a) Calculer $\displaystyle\int\int_{D_1} xdxdy$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int\int_{D_2} xdxdy$ à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.
   (c) Retrouver le volume de $\mathcal{V}$.
4. Soit $\mathcal{C}$ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.
   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-yx, 0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.
   (c) Soient p et q deux fonctions dérivables. Trouver en utilisant la question précédente la circulation du champ de vecteurs $\vec{u} = (p(x), q(y) + x^2)$.

Exercice 2. (10 points)

1. Soit Σ_1 la surface suivante :
$$\Sigma_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\right\},$$
   (a) Faire une figure représentant Σ_1.
   (b) Paramétrer Σ_1 en utilisant les coordonnées cylindriques.
   (c) Calculer l'aire de Σ_1.
2. Soit $\mathcal{V}$ le volume défini par :
$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 + 4(z - 1)^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\},$$
   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.
   (b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$, en utilisant la méthode de bâtons.
   “
3. Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V}$.
   (a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).
   (b) On suppose que (S) est orientée vers la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$. Donner les composantes des vecteurs normaux.
   (c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, 0)$ à travers (S).

Tournez la page S.V.P

Rappel

1. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

2. Masse et longueur d'une courbe : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors

   (a) La masse totale de $\mathcal{C}$ est donnée par formule suivante :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

   (b) La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

3. L'aire d'une surface : Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$, avec $(u,v) \in \Delta$ alors l'aire de Σ est donnée par formule suivante :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_\Sigma d\sigma = \int\int_\Delta \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv$$

4. Flux à travers d'un surface : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}_\Sigma$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int_\Sigma \vec{V}.\vec{n}_\Sigma\, d\sigma.$$

5. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$