Université de Technologie de Compiègne

MT22 -Corrigé Juin 2023- Final
Durée : 2h00.

Exercice 1. (8 points) On définit le domaine suivant :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y - x - 1 \leq 0\}.$$

1. Représenter graphiquement D.
   Corrigé (1 point) : Il s'agit de l'intérieur d'un cercle de centre O de rayon 1 coupé par la droite $-x + y = 1$.
2. On note $\mathcal{C}$ le bord de D. Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
   Corrigé (2 point) : La courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ avec

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = x \\ y = 1 + x \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 0,$$

   et

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi/2.$$

3. On suppose que $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique. Déterminer la circulation de $\vec{V} = (y^2, -xy)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
   Corrigé (2 points) : On sait que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_1}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{V})$. De plus,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_1}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_1} y^2 dx - xy dy = \int_0^{-1} ((1+x)^2 - x - x^2) dx = \left[\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2}$$

   et

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_2} y^2 dx - xy dy = -\int_{-\pi}^{\pi/2} (\sin^3(\theta) + \cos^2(\theta)\sin(\theta)) d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(\theta) = [\cos(\theta)]_{-\pi}^{\pi/2} = 1.$$

   Donc $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
4. Soient

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y - x - 1 \leq 0,\ -1 \leq x \leq 0\},$$

   et $D_2 = D \backslash D_1$. Calculer

$$I_1 = \int\int_{D_1} y dx dy \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_{D_2} y dx dy.$$

   Corrigé (2 points) : On a

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} y dy dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x)^3}{3} - x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{6}.$$

   et

$$I_2 = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = 0.$$

5. Retrouver la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ en utilisant le théorème de Green-Riemann.
   Corrigé (1 point) : Le champ de vecteurs $\vec{V}$ a pour composantes $P(x, y) = y^2$ et $Q(x, y) = -xy$. Après avoir vérifié que les hypothèses du théorème s'appliquent, on a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = -3 \int\int_D y dx dy = -3(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2. (2 points)

1. On considère la fonction $g(t) = \sqrt{1+t^2}$. Soit $I(t)$ la primitive de $g(t)$, vérifiant $I(0) = 0$. Vérifier que

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\text{argsh}(t) + t\sqrt{1+t^2}\right),$$

en justifiant votre réponse.
Indication : Nous rappelons que

$$\text{argsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Corrigé (1 point) : On a bien $I(0) = 0$, de plus

$$I'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \sqrt{1+t^2}.$$

2. Représenter graphiquement (allure) et calculer la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation paramétrique :

$$\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t) \end{array} \right. \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Corrigé (1 point) : $\mathcal{C}$ est une spirale démarrant du point $(0,0)$ et arrivant au point $(2\pi, 0)$. La longueur de $\mathcal{C}$ est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\text{argsh}(t) + t\sqrt{1+t^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\text{argsh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

Exercice 3. (12 points)

1. Soit Σ la surface définie par :

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad z = y - x,\ 0 \le y \le 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0\right\}.$$

(a) Faire une figure représentant la surface Σ.
Corrigé (1 point) : Σ est la surface limitée par le triangle ABC, avec $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$ et $C = (0,1,1)$.

(b) Exprimer l'intégrale surfacique de $f(x,y,z)$ sur Σ à l'aide d'une intégrale double en x et y.
Corrigé (1 point) : En paramétrant Σ, en fonction de x et y, on obtient

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = y - x \end{array} \right. \quad (x,y) \in D$$

où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\right\}$. Puisque que la normale à Σ est le vecteur $\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = (1,-1,1)$, alors on a

$$\int\int_\Sigma f(x,y,z)d\sigma = \int\int_D f(x,y,y-x)\|\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y\|dxdy = \sqrt{3}\int\int_D f(x,y,y-x)dxdy.$$

(c) En déduire l'aire de Σ.
Corrigé (1 point) :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_\Sigma d\sigma = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^y dxdy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. On oriente Σ par la normale unitaire $\vec{n}_\Sigma$ dont la troisième composante est positive. Soit $\vec{U} = (xy, yz, xz)$.

(a) Calculer le flux de $\textbf{rot}(\vec{U})$ à travers la surface Σ.
Corrigé (1 point) : Tout d'abord, on calcule le rotationnel de $\vec{U}$, $\textbf{rot}(\vec{U}) = (-y, -z, -x)$. Puisque, Σ est orientée suivant la normale $\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = (1,-1,1)$, alors on déduit que

$$\phi_\Sigma(\textbf{rot}(\vec{U})) = \int\int_D \textbf{rot}(\vec{U}).(\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y)dxdy.$$

Par conséquent,

$$\phi_\Sigma(\textbf{rot}(\vec{U})) = -2\int\int_D xdxdy = -2\int_0^1\int_0^y xdxdy = -\frac{1}{3}.$$

(b) Soit Γ le bord de Σ. Donner une paramétrisation de la courbe Γ.
Corrigé (1.5 points) : Γ n'est autre que le triangle ABC avec $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$ et $C = (0,1,1)$. Alors, $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, où

$$[AB] : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} 0 \leq t \leq 1, \quad [BC] : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} 0 \leq t \leq 1, \text{ et } [CA] : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t+1 \\ z = -t+1 \end{cases} 0 \leq t \leq 1.$$

(c) Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe Γ, en choisissant l'orientation conduisant à l'égalité suivante :

$$\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = \int_\Gamma xydx + yzdy + xzdz = \int\int_\Sigma \text{rot}(\vec{U}).\vec{n}_\Sigma \, d\sigma.$$

Corrigé (1.5 points) : En choisissant l'orientation $A \to B \to C \to A$, on peut vérifier que

$$\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = \int_{[AB]} xydx + yzdy + xzdz + \int_{[BC]} xydx + yzdy + xzdz + \int_{[CA]} xydx + yzdy + xzdz.$$

D'où

$$\mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (-(-t+1) + t(-t+1))dt + \int_0^1 -(-t+1)^2 dt = \int_0^1 (-t^2 + 4t - 2)dt = -\frac{1}{3}.$$

Du coup, cette orientation vérifier bien l'égalité suivante : $\phi_\Sigma(\mathbf{rot}(\vec{U})) = \mathcal{T}_\Gamma(\vec{U}) = -\frac{1}{3}$.

3. On considère le volume suivant :

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq z \leq y - x, \ 0 \leq y \leq 1, \ x \geq 0\right\}.$$

(a) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
Corrigé (1 point) : On utilse la mêthode de bâtons, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_\mathcal{V} dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{y-x} dz\right) dxdy = \int\int_D (y-x)dxdy = \int_0^1 \int_0^y (y-x)dxdy = \frac{1}{6}.$$

(b) Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V}$. On suppose que (S) est orientée par la normale qui pointe vers l'extérieur de $\mathcal{V}$. Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).

Corrigé (2 points) : On a $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_3) \cup \Sigma$, où

$$(S_1) : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} (x,y) \in D_1, \quad (S_2) : \begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} (x,z) \in D_2,$$

$$(S_3) : \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} (y,z) \in D_3,$$

avec

$$D_1 = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$
$$D_2 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$$
$$D_3 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

(c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (0, y, z)$ à travers (S).
Corrigé (2 points) : Puisque (S) est orientée vers la normale extérieure, donc (S_1) est orientée vers la normale $(0,0,-1)$, (S_2) est orientée vers la normale $(0,1,0)$, (S_3) est orientée vers la normale $(-1,0,0)$ et Σ est orientée vers la normale $\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = (1,-1,1)$. Cela implique que

$$\phi_{S_1}(\vec{W}) = \int\int_{D_1} -zdxdy = 0,$$

$$\phi_{S_2}(\vec{W}) = \int\int_{D_2} y dxdz = \int\int_{D_2} dxdz = \int_0^1 \int_0^{1-x} dzdx = \frac{1}{2}.$$

$$\phi_{S_3}(\vec{W}) = \int\int_{D_3} 0 dydz = 0,$$

$$\phi_\Sigma(\vec{W}) = \int\int_D (\vec{W}).(\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y) dxdy = -\int\int_D x dxdy = -\int_0^1 \int_0^y x dxdy = -\frac{1}{6}.$$

Alors $\phi_S(\vec{W}) = \frac{1}{3}$.

Rappel

1. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

2. Masse et longueur d'une courbe : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors
   (a) La masse totale de $\mathcal{C}$ est donnée par formule suivante :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

   (b) La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

3. Flux à travers d'un surface : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}_\Sigma$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int_\Sigma \vec{V}.\vec{n}_\Sigma \, d\sigma.$$

4. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$