Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2024- Final **Durée : 2h00.** Les documents et calculatrices sont interdits La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (11 points)

1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x + 4,\ x^2 + (y-2)^2 \geq 4\right\}.$$

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant D.

(b) Expliciter de deux façons différentes $\int\int_D f(x, y)dxdy$ à l'aide d'intégrales simples en x et en y.

Corrigé (2 pts) : On a

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy\right] dx + \int_2^4 \left[\int_0^{-x+4} f(x, y)dy\right] dx$$

et

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-y+4} f(x, y)dx\right] dy.$$

2. Soit $\mathcal{V}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ constitué des points situés à l'extérieur du cylindre d'axe $(x = 0, y = 2)$, de rayon 2 et qui vérifient $x \geq 0, 0 \leq y \leq -x + 4, 0 \leq z \leq x$.

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé (1 pt) : On a

$$\begin{aligned} V(\mathcal{V}) = \int\int_D xdxdy &= \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-y+4} xdx\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (-y+4)^2 - 4 + (y-2)^2 dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(y-4)^3}{3} - 4y + \frac{(y-2)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

3. On définit

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x + 4,\ y \leq 2\right\},$$

et $D_2 = D_1 \backslash D$ (D_1 privé de D).

(a) Calculer $\int\int_{D_1} xdxdy$.

Corrigé (1 pt) : On a

$$\int\int_{D_1} xdxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{-y+4} xdx\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (-y+4)^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{(y-4)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{28}{3}.$$

(b) Calculer $\int\int_{D_2} xdxdy$ à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.

Corrigé (1 pt) : On pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta) + 2$. On peut vérifier que $(x, y) \in D_2$ ssi $(r, \theta) \in \Delta_2 = \{0 \leq r \leq 2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\}$. De plus, puisque le déterminant Jacobien $|J| = r$ on obtient que

$$\int\int_{D_2} xdxdy = \int\int_{\Delta_2} r^2\cos(\theta)drd\theta = \int_0^2 r^2 \left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(c) Retrouver le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé (0,5 pt) : On sait que

$$V(\mathcal{V}) = \int\int_D x dx dy = \int\int_{D_1} x dx dy - \int\int_{D_2} x dx dy = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} = \frac{20}{3}.$$

4. Soit $\mathcal{C}$ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigé (1,5 pts) : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, avec

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} 0 \leq x \leq 4, \qquad \mathcal{C}_2 = \begin{cases} x = x \\ y = -x + 4 \end{cases} 2 \leq x < 4,$$

et

$$\mathcal{C}_3 = \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta) + 2 \end{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < 0.$$

(b) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-yx, 0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Corrigé (1,5 pts) : Puisque $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens trigonométrique, on peut voir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_{\mathcal{C}} -yx dx = \int_{\mathcal{C}_1} -yx dx + \int_{\mathcal{C}_2} -yx dx + \int_{\mathcal{C}_3} -yx dx \\
&= 0 + \int_4^2 (x-4) x dx + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta) + 1)\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^2 + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos(\theta) d\theta + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{16}{3} + 8\left[\frac{\sin^3(\theta)}{3}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}} + 4\left[\sin^2(\theta)\right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

De plus, d'après la formule de Green-Riemann on sait que

$$\int_{\mathcal{C}} -yx dx = \int\int_D x dx dy = V(\mathcal{V}) = \frac{20}{3}.$$

(c) Soient p et q deux fonctions dérivables. Trouver en utilisant la question précédente la circulation du champ de vecteurs $\vec{u} = (p(x), q(y) + x^2)$.

Corrigé (0,5 pt) : D'après la formule de Green-Riemann on sait que

$$\int_{\mathcal{C}} p(x) dx + (q(y) + x^2) dy = 2 \int\int_D x dx dy = \frac{40}{3}.$$

Exercice 2. (11 points)

1. Soit Σ_1 la surface suivante :

$$\Sigma_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\right\},$$

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant Σ_1.

(b) Paramétrer Σ_1, en utilisant les coordonnées cylindriques.

Corrigé (1 pt) :

$$\Sigma_1 = \begin{cases} x = \sqrt{z}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [0, 1] \\ z = z \end{cases}$$

(c) Calculer l'aire de Σ_1.

Corrigé (1 pt) : Vu que la normale à Σ_1 est le vecteur $\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z} = \left(\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), -\frac{1}{2}\right)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Sigma_1) &= \int\int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z}\| d\theta dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta dz \\
&= \left[\frac{4\pi}{3}\left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1).
\end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{V}$ le volume défini par :

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 + 4(z-1)^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\},$$

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$, en utilisant la méthode de bâtons.

Corrigé (2 pts) : En utilisant la méthode de bâtons, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = \int\int_D \left[\int_{x^2+y^2}^{1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}\right] dxdy = \int\int_D 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2 dxdy$$

avec $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. En effectuant le changement de variables $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ on peut vérifier que $(x, y) \in D$ ssi $(r, \theta) \in \Delta = \{0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. De plus, puisque le déterminant Jacobien $|J| = r$ on obtient que

$$V(\mathcal{V}) = \int\int_\Delta (1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - r^2} - r^2) r dr d\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{1}{6}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3. Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V}$.

(a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).

Corrigé (1 pts) : On a $(S) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, avec

$$\Sigma_1 = \begin{cases} x = \sqrt{z}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [0, 1] \\ z = z \end{cases}$$

et

$$\Sigma_2 = \begin{cases} x = \sqrt{1 - 4(z-1)^2}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{1 - 4(z-1)^2}\sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [\frac{1}{2}, 1] \\ z = z \end{cases}$$

(b) On suppose que (S) est orientée vers la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$. Donner les composantes des vecteurs normaux.

Corrigé (2 pts) : Ici Σ_1 est orientée suivant la normale $\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z} = \left(\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), -\frac{1}{2}\right)$. Par conséquent,

$$\vec{n}_{\Sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{z + \frac{1}{4}}}\left(\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), -\frac{1}{2}\right).$$

De plus, Σ_2 est orientée suivant la normale $-(\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z}) = \left(-\sqrt{1 - 4(z-1)^2}\cos(\theta), -\sqrt{1 - 4(z-1)^2}\sin(\theta), -4(z-1)\right)$. Par conséquent,

$$\vec{n}_{\Sigma_2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 12(z-1)^2}}\left(\sqrt{1 - 4(z-1)^2}\cos(\theta), \sqrt{1 - 4(z-1)^2}\sin(\theta), 4(z-1)\right).$$

(c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, 0)$ à travers (S).

Corrigé (2 pts) : Puisque, Σ_1 est orientée suivant la normale $\left(\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), -\frac{1}{2}\right)$ alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = \int\int_{\Delta_1} \vec{W}.(\vec{T_z} \wedge \vec{T_\theta})d\theta dz.$$

où $\Delta_1 = \{0 \leq z \leq 1, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Par conséquent,

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = \int\int_{\Delta_1} z d\theta dz = \pi.$$

De même, puisque Σ_2 est orientée suivant la normale $-(\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z}) = \left(-\sqrt{1-4(z-1)^2}\cos(\theta), -\sqrt{1-4(z-1)^2}\sin(\theta), -4(z-1)\right)$ alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = -\int\int_{\Delta_2} \vec{W}.(\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z})d\theta dz.$$

où $\Delta_2 = \{\frac{1}{2} \leq z \leq 1, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Par conséquent,

$$\phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = -\int\int_{\Delta_2} (1-4(z-1)^2)d\theta dz = -2\pi\left[z - \frac{4(z-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Finalement, on a $\phi_{(S)}(\vec{W}) = \phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) + \phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.