Nom : Prénom :

Final MT22 - A2024

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

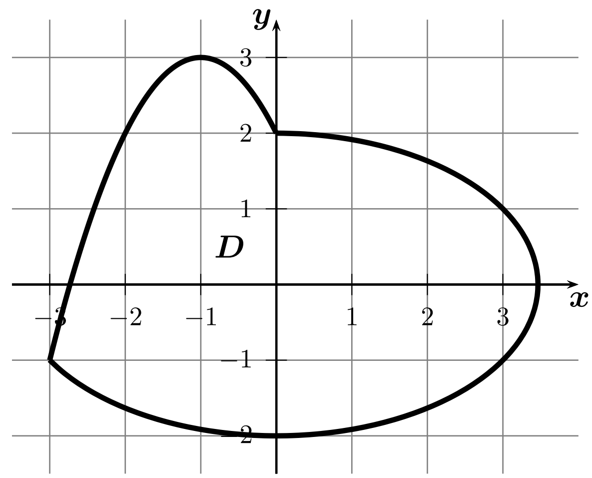
Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 9 points - 50 min)
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'extrémités $A(-3\,;-1)$ et $B(0\,;2)$ et définies par

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad y+(x+1)^2 = 3 \text{ et } y \geq x+2$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ et } y \leq x+2.$$

et représenté graphiquement ci-contre.



1. (a) Paramétrer la courbe $\mathscr{C}_1$ orientée de B vers A.

(b) Paramétrer le segment $[AB]$ orienté de A vers B.

(c) On considère le champ de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix}-y\\(1+x)^2\end{pmatrix}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} + \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = 0$.

(d) Soit D_1 le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_1$ et le segment $[AB]$. Justifier à l'aide d'un théorème intégral que $\displaystyle\iint_{D_1} (2x+3)dxdy = 0$.

2. Soit $D_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y \leq x+2,\ x \leq 3y \text{ et } x \leq 0\}$.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_2 sur la figure ci-dessus.

(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

(c) Avec l'une des formules précédentes, montrer que $\displaystyle\iint_{D_2} (2x+3)\,dxdy = 3$.

3. Soit $D_3 = D\backslash(D_1\cup D_2)$

(a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_3} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

(b) En déduire que $\displaystyle\iint_D (2x+3)dxdy = 8\pi\sqrt{3}+27$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points - 40min)

Soient $A(2,3,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,1,2)$ et $D(0,1,0)$ quatres points dans l'espace.
On considère le tétraèdre de sommets $ABCD$ défini par :

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y+z \leq 3, \ y \geq 1+x \ \text{ et } x \geq 0, z \geq 0\}.$$

1. Faire une figure en perspective du tetraèdre Ω.

2. (a) Déterminer la projection D du tetraèdre Ω sur le plan $x = 0$.

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox), transformer l'intégrale triple $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $V(\Omega)$.

(b) Montrer que l'ordonnée du centre de gravité de Ω est $y_G = \dfrac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz = 2$.

4. On note $\mathcal{S}$ le bord de Ω, orienté par le champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ dirigé vers l'extérieur de Ω. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ y+z = 3, \ y \geq 1+x \ \text{ et } x \geq 0, z \geq 0\}$.

(a) À l'aide d'une paramétrisation de Σ par les variables (x,z), calculer le flux de $\vec{U}(x,y,z) = \left(x, y-1, \dfrac{yz}{2}\right)$ à travers la face Σ.

(b) Justifier que le flux de $\vec{U}$ à travers les trois autres faces est nul.

(c) Déduire des questions précédentes, et de deux façons différentes, que le flux de $\vec{U}$ à travers $\mathcal{S}$ est $\mathcal{F}lux_{\mathcal{S}}(\vec{U}) = 4$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points - 30 min)

On considère les courbes Γ_1 et Γ_2 de l'espace définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$\Gamma_1 := \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ et } z = 0, \qquad \Gamma_2 := \quad x^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \text{et} \quad z = y+1.$$

1. Faire une figure en perspective.

2. Paramétrer les courbes Γ_1 et Γ_2, orientées dans le sens croissant du paramètre.

3. Soit $\vec{V}(x,y,z) = \left(\dfrac{z}{3}, x, 1\right)$. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$ et $I_2 = \displaystyle\int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$.

4. On considère la surface $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + 2y^2 - (z+1)^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq y+1\}$.

(a) Justifier que le bord de Σ est $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

(b) Sur la figure précédente, indiquer l'orientation des courbes Γ_1 et Γ_2 cohérente avec le champ des normales unitaires à la surface Σ faisant un angle obtu avec le demi-axe positif $[Oz)$.

(c) À l'aide d'un théorème intégral, exprimer le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}$, noté $\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V})$, en fonction de I_1 et I_2.