Médian MT22 - A2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1+\alpha x^2 - e^{-y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange de la fonction exp à l'ordre 1 en $a = 0$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\xi \in]0,1[$ tel que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} e^{\xi t}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = 1$.
   (Indication : étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$ pour démontrer l'équivalence.)
2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ en fonction de α.
3. Pour $\alpha = 1$, la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \ln(1+x+2y) - 2y(1+x+y).$$

1. Préciser le domaine de définition D de f et justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.
2. Déterminer le gradient de la fonction f .
3. En déduire l'unique point critique $M_0(x_0, y_0)$ de f.
   (Indication : on justifiera que $1 + x_0 + 2y_0 = 1$.)
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
5. En déduire la nature du point critique (minimum, maximum ou point selle).

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
On considère le domaine défini par $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \;\text{ et }\; 4y \geq x^2\}$.

1. Faire une figure.
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(\sqrt{3}, 2) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) En déduire les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Exercice 4 (Barème approximatif : 6 points)
Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \phi'(y) \\ \phi'(z) \end{pmatrix},$$

où ϕ est une fonction d'une variable réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire (sans chercher à le déterminer).
2. Exprimer, en fonction de ϕ, les potentiels scalaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\vec{V} = \nabla f$.
3. On suppose que $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \Delta f(x, y, z) = 0$.
   (a) Justifier que le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \Phi''(t) = 0$.
   (c) On cherche $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \psi(y, z) \\ \psi(z, x) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}$$

   où $\psi : (u, v) \mapsto \psi(u, v)$ est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et antisymétrique :

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \psi(v, u) = -\psi(u, v).$$

   i. Montrer que $\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = C.$
   ii. En déduire une expression algébrique du champ de vecteur $\vec{A}$.