Médian MT22 - A2024

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Partie I - Continuité, différentiabilité

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2-y^2)\ln(x+y) & \text{si } x+y>0 \\ f(0,0)=0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Indications : (i) on rappelle que $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ et (ii) $\forall t \in]0,2],\ |t\ln t| \leq \sqrt{t}$.

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$, puis en $(x,y)\neq(0,0)$.
3. Soit u la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $u(t)=-t+e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t\in\mathbb{R}^*$ et $u(0)=0$. À l'aide des courbes paramétrées par $(t,u(t))$ et $(u(t),t)$ pour $t\in\mathbb{R}$, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Partie II - Recherche d'extrema locaux

Soit g la fonction définie par $g(x,y)=(x^2-y^2)\ln(x+y)+xy+\frac{y^2}{2}$.
On admet que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y>0\}$.

1. Étudier l'équation $y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$ pour montrer que les points critiques (x_0,y_0) de g vérifient $x_0(2x_0+y_0)=0$.
2. Montrer que les deux points critiques de g sont $(0,1)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{2}{\sqrt{e}})$. *(Présentez une résolution de système !)*
3. Calculer les dérivées partielles secondes de g.
4. Déterminer la nature des points critiques de g. *(minimum, maximum ou point selle).*

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)

Soit V le champ de vecteurs défini par $\vec{V}(x,y,z)=g(\sqrt{x^2+y^2})\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$ où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{U}: D\to\mathbb{R}^3$ si et seulement si

   $(**)\qquad \forall r>0,\ rg'(r)+4g(r)=0.$

2. Déterminer la fonction g satisfaisant $(**)$ ainsi que la condition initiale $g(1)=2$.
3. Déterminer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}(x,y,z)=\textbf{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(z)f(x,y) \end{pmatrix}$, où h et f sont à déterminer.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{x^2}{3} + y^2 \geq 1, \quad \text{et} \ \ (x+1)^2 + y^2 \leq 2 \right\}.$$

1. Faire une figure. *(Notez que* $(0,1)$ *et* $(0,-1)$ *sont les deux sommets de* $\mathscr{C}$*.)*
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

Formulaire : ① On rappelle les formules suivantes : pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiables, on a $\mathrm{div}(g\vec{A}) = \nabla g \cdot \vec{A} + g \,\mathrm{div}\, \vec{A}$ et $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(g\vec{A}) = \nabla g \wedge \vec{A} + g\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}$. De plus, si $\vec{A}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ alors $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{A} = -\Delta\vec{A} + \nabla(\mathrm{div}\,\vec{A})$.

② On rappelle que la forme générale des solutions d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

est

$$y(t) = Ce^{A(t)},$$

où A est une primitive de a à déterminer et $C \in \mathbb{R}$ est une contante réelle quelconque.