Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2024 - Médian **Durée : 1h30.** Les documents et calculatrices sont interdits La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (**2 points**) Soit c une constante réelle. On considère l'équation suivante, dite équation de transport :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = c\frac{\partial f}{\partial x}(t,x). \tag{1}$$

On suppose désormais que $f(t,x) = a(x+h(t))$ où a et h sont des fonctions dérivables. De plus, on suppose que $h(0) = 0$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en fonction des dérivées premières de a et h.
2. Trouver la fonction h pour que f soit une solution de l'équation de transport (1), pour toute fonction a.

Exercice 2. (**4 points**) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}, \quad \text{pour tout} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
   Indication : On pourra utiliser $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
2. Étudier la nature de ces points ?

Exercice 3. (**5,5 points**)

1. Le théorème de Taylor-Young assure qu'une fonction g deux fois dérivables vérifie la formule suivante au voisinage de x_0 :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\epsilon(x) = 0.$$

   Soit $g(x) = e^x$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$, au voisinage de 0.
2. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (a) La fonction f est-elle continue au point $(0,0)$?
   (b) Les dérivées partielles premières de f existent-elles au point $(0,0)$?
   (c) La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$?
   (d) Les dérivées partielles de f sont-elles continues au point $(0,0)$?

Exercice 4. (**5 points**) Soient α et β deux constantes réelles. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V} = (y+\beta x, x-2y+2\alpha z, 2\beta y + \alpha z).$$

1. Sous quelles conditions portant sur α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
2. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f telle que $f(0,0,0) = -1$ et $f(1,1,1) = 1$. Calculer, dans ce cas, f, α et β.
3. Pour quelles valeurs de α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur ?
4. On se place dans le cas précédent et on suppose que $\vec{V} = \mathbf{rot}(\vec{U})$ avec

$$\vec{U} = (-g(y) + z\phi(x,y), -z\psi(x,y), -2zx) \quad \text{où} \quad g(0) = 0.$$

   Déterminer la forme générale des fonctions g, ψ et ϕ. En déduire la forme de $\vec{U}$.

Tournez la page S.V.P

Exercice 5. (3,5 points)

1. Soient π_1 et π_2 les plans suivant :

$$\pi_1 : x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad \pi_2 : ax - y - z = 1,$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Trouver un vecteur normal $\vec{N_1}$ à π_1 et un vecteur normal $\vec{N_2}$ à π_2.
   (b) Pour quelle valeur de a, π_1 et π_2 sont colinéaires. Justifier votre réponse.
   (c) Pour quelle valeur de a, π_1 et π_2 sont orthogonaux. Justifier votre réponse.
   (d) Est-il possible d'avoir $\pi_1 = \pi_2$. Justifier votre réponse.

2. On suppose désormais que π_1 et π_2 ne sont pas colinéaires et on note la droite D l'intersection entre π_1 et π_2.

   (a) Trouver un vecteur directeur $\vec{V}$ de D.
   (b) Trouver un point particulier M_0 de D.
   (c) En déduire une équation paramétrique de D.