

Exercice 1. (11 points)

1. On considère le domaine de \mathbb{R}^2 défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0, 0 \leq y \leq -x + 4, x^2 + (y - 2)^2 \geq 4\}.$$

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant D .

(b) Expliciter de deux façons différentes $\int \int_D f(x, y) dx dy$ à l'aide d'intégrales simples en x et en y .

Corrigé (2 pts) : On a

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right] dx + \int_2^4 \left[\int_0^{-x+4} f(x, y) dy \right] dx$$

et

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-y+4} f(x, y) dx \right] dy.$$

2. Soit \mathcal{V} le domaine de \mathbb{R}^3 constitué des points situés à l'extérieur du cylindre d'axe $(x = 0, y = 2)$, de rayon 2 et qui vérifient $x \geq 0, 0 \leq y \leq -x + 4, 0 \leq z \leq x$.

(a) **(1 pt)** Faire une figure représentant \mathcal{V} .

(b) Calculer le volume de \mathcal{V} .

Corrigé (1 pt) : On a

$$\begin{aligned} V(\mathcal{V}) &= \int \int_D x dx dy = \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-y+4} x dx \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (-y+4)^2 - 4 + (y-2)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(y-4)^3}{3} - 4y + \frac{(y-2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

3. On définit

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0, 0 \leq y \leq -x + 4, y \leq 2\},$$

et $D_2 = D_1 \setminus D$ (D_1 privé de D).

(a) Calculer $\int \int_{D_1} x dx dy$.

Corrigé (1 pt) : On a

$$\int \int_{D_1} x dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^{-y+4} x dx \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (-y+4)^2 dy = \frac{1}{2} \left[\frac{(y-4)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{28}{3}.$$

(b) Calculer $\int \int_{D_2} x dx dy$ à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.

Corrigé (1 pt) : On pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta) + 2$. On peut vérifier que $(x, y) \in D_2$ ssi $(r, \theta) \in \Delta_2 = \{0 \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\}$. De plus, puisque le déterminant Jacobien $|J| = r$ on obtient que

$$\int \int_{D_2} x dx dy = \int \int_{\Delta_2} r^2 \cos(\theta) dr d\theta = \int_0^2 r^2 [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(c) Retrouver le volume de \mathcal{V} .

Corrigé (0,5 pt) : On sait que

$$V(\mathcal{V}) = \int \int_D x dx dy = \int \int_{D_1} x dx dy - \int \int_{D_2} x dx dy = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} = \frac{20}{3}.$$

4. Soit \mathcal{C} le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe \mathcal{C} .

Corrigé (1,5 pts) : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, avec

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 4, \quad \mathcal{C}_2 = \begin{cases} x = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad 2 \leq x < 4,$$

et

$$\mathcal{C}_3 = \begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) + 2 \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0.$$

(b) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-yx, 0)$ le long de la courbe \mathcal{C} directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Corrigé (1,5 pts) : Puisque \mathcal{C} est orientée dans le sens trigonométrique, on peut voir que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_{\mathcal{C}} -yxdx = \int_{\mathcal{C}_1} -yxdx + \int_{\mathcal{C}_2} -yxdx + \int_{\mathcal{C}_3} -yxdx \\ &= 0 + \int_4^2 (x-4)xdx + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta) + 1) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_4^2 + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta + 8 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3} + 8 \left[\frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{-\frac{\pi}{2}} + 4 [\sin^2(\theta)]_0^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la formule de Green-Riemann on sait que

$$\int_{\mathcal{C}} -yxdx = \int \int_D x dx dy = V(\mathcal{V}) = \frac{20}{3}.$$

(c) Soient p et q deux fonctions dérivables. Trouver en utilisant la question précédente la circulation du champ de vecteurs $\vec{u} = (p(x), q(y) + x^2)$.

Corrigé (0,5 pt) : D'après la formule de Green-Riemann on sait que

$$\int_{\mathcal{C}} p(x)dx + (q(y) + x^2)dy = 2 \int \int_D x dx dy = \frac{40}{3}.$$

Exercice 2. (11 points)

1. Soit Σ_1 la surface suivante :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = x^2 + y^2, z \leq 1\},$$

(a) (1 pt) Faire une figure représentant Σ_1 .

(b) Paramétrer Σ_1 , en utilisant les coordonnées cylindriques.

Corrigé (1 pt) :

$$\Sigma_1 = \begin{cases} x = \sqrt{z} \cos(\theta) \\ y = \sqrt{z} \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, 1]$$

(c) Calculer l'aire de Σ_1 .

Corrigé (1 pt) : Vu que la normale à Σ_1 est le vecteur $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\sqrt{z} \cos(\theta), \sqrt{z} \sin(\theta), -\frac{1}{2})$, alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma_1) &= \int \int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z\| d\theta dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta dz \\ &= \left[\frac{4\pi}{3} \left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

2. Soit \mathcal{V} le volume défini par :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq z, z \leq 1\},$$

(a) (1 pt) Faire une figure représentant \mathcal{V} .

(b) Calculer le volume de \mathcal{V} , en utilisant la méthode de bâtons.

Corrigé (2 pts) : En utilisant la méthode de bâtons, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int \int \int_{\mathcal{V}} dx dy dz = - \int \int_D \left[\int_{x^2+y^2}^{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] dx dy = - \int \int_D 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} - x^2 - y^2 dx dy$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\}$. En effectuant le changement de variables $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ on peut vérifier que $(x, y) \in D$ ssi $(r, \theta) \in \Delta = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. De plus, puisque le déterminant Jacobien $|J| = r$ on obtient que

$$V(\mathcal{V}) = - \int \int_{\Delta} (1 - \sqrt{1-r^2} - r^2) r dr d\theta = -2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{1}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3. Soit (S) la surface limitant le volume \mathcal{V} .

(a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S) .

Corrigé (1 pts) : On a $(S) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, avec

$$\Sigma_1 = \begin{cases} x = \sqrt{z} \cos(\theta) \\ y = \sqrt{z} \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, 1]$$

et

$$\Sigma_2 = \begin{cases} x = \sqrt{1-(z-1)^2} \cos(\theta) \\ y = \sqrt{1-(z-1)^2} \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, 1]$$

(b) On suppose que (S) est orientée vers la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du volume \mathcal{V} . Donner les composantes des vecteurs normaux.

Corrigé (2 pts) : Ici Σ_1 est orientée suivant la normale $-\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = -(\sqrt{z} \cos(\theta), \sqrt{z} \sin(\theta), -\frac{1}{2})$. Par conséquent,

$$\vec{n}_{\Sigma_1} = -\frac{1}{\sqrt{z + \frac{1}{4}}} \left(\sqrt{z} \cos(\theta), \sqrt{z} \sin(\theta), -\frac{1}{2} \right).$$

De plus, Σ_2 est orientée suivant la normale

$(\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) = (\sqrt{1-(z-1)^2} \cos(\theta), \sqrt{1-(z-1)^2} \sin(\theta), (z-1))$. Par conséquent,

$$\vec{n}_{\Sigma_2} = \left(\sqrt{1-(z-1)^2} \cos(\theta), \sqrt{1-(z-1)^2} \sin(\theta), (z-1) \right).$$

(c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, 0)$ à travers (S) .

Corrigé (2 pts) : Puisque, Σ_1 est orientée suivant la normale $-(\sqrt{z} \cos(\theta), \sqrt{z} \sin(\theta), -\frac{1}{2})$ alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = - \int \int_{\Delta_1} \vec{W} \cdot (\vec{T}_z \wedge \vec{T}_\theta) d\theta dz.$$

où $\Delta_1 = \{0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Par conséquent,

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = - \int \int_{\Delta_1} z d\theta dz = -\pi.$$

De même, puisque Σ_2 est orientée suivant la normale

$(\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) = (\sqrt{1 - (z - 1)^2} \cos(\theta), \sqrt{1 - (z - 1)^2} \sin(\theta), (z - 1))$ alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = \int \int_{\Delta_2} \vec{W} \cdot (\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) d\theta dz.$$

où $\Delta_2 = \{\frac{1}{2} \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Par conséquent,

$$\phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = \int \int_{\Delta_2} (1 - (z - 1)^2) d\theta dz = 2\pi \left[z - \frac{(z - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Finalement, on a $\phi_{(S)}(\vec{W}) = \phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) + \phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = -\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.