

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Partie I - Continuité, différentiabilité

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x + y) & \text{si } x + y > 0 \\ f(0, 0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Indications : (i) on rappelle que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et (ii) $\forall t \in]0, 2], |t \ln t| \leq \sqrt{t}$.

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0, 0)$.

Correction : On a pour $|x + y| \leq 2$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |(x^2 - y^2) \ln(x + y)| = |(x - y)(x + y) \ln(x + y)| \leq |x - y| \sqrt{x + y}$$

On utilise les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[, \quad |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)| \leq r |\cos \theta - \sin \theta| \sqrt{r(\cos \theta + \sin \theta)} \leq 2r \sqrt{2r} = g(r)$$

Comme $g(r) = 2r\sqrt{2r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, la condition suffisante de continuité est démontrée. La fonction f est bien continue en $(0, 0)$.

2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0, 0)$, puis en $(x, y) \neq (0, 0)$.

Correction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \ln h = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} -k \ln k = 0. \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x+y) + \frac{x^2 - y^2}{x+y} = 2x \ln(x+y) + (x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \ln(x+y) + (x-y).$$

3. Soit u la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $u(t) = -t + e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t \in \mathbb{R}^*$ et $u(0) = 0$.
À l'aide des courbes paramétrées par $(t, u(t))$ et $(u(t), t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.

Correction : • Pour justifier la non continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on choisit le chemin $(t, u(t))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) = 2t \ln(e^{-\frac{1}{t^2}}) + (t - u(t)) = 2t \times (-\frac{1}{t^2}) + (t - u(t)) = -\frac{1}{t} + (t - u(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \pm \infty.$$

La limite n'existe pas donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

• Pour justifier la non continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on choisit le chemin $(u(t), t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), t) = -2t \ln(e^{-\frac{1}{t^2}}) + (u(t) - t) = -2t \times (-\frac{1}{t^2}) + (u(t) - t) = \frac{1}{t} + (u(t) - t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \pm \infty.$$

La limite n'existe pas donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

4. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Correction : Il ne faut pas utiliser les liens logiques.

On a $|\varepsilon(h, k)| = \left| \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{|h-k|\sqrt{h+k}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$. En coordonnées polaires, on obtient

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[, \quad |\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq |\cos \theta - \sin \theta| \sqrt{r(\cos \theta + \sin \theta)} \leq 2\sqrt{2r} = g(r)$$

Comme $g(r) = 2\sqrt{2r} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$, la fonction f est bien différentiable en $(0, 0)$.

Partie II - Recherche d'extrema locaux

Soit g la fonction définie par $g(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x + y) + xy + \frac{y^2}{2}$.

On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 0\}$.

- Étudier l'équation $y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ pour montrer que les points critiques (x_0, y_0) de g vérifient $x_0(2x_0 + y_0) = 0$.

Correction : Le gradient de g est

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \ln(x + y) + (x - y) + y \\ -2y \ln(x + y) + (x - y) + x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \ln(x + y) + x \\ -2y \ln(x + y) + 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= y(2x \ln(x + y) + x) + x(-2y \ln(x + y) + 2x) \\ &= xy + 2x^2 = x(2x + y). \end{aligned}$$

Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point critique de g alors $\nabla g(M_0) = \vec{0}$ donc les points critiques vérifient $x_0(2x_0 + y_0) = 0$. Soit $x_0 = 0$, soit $y_0 = -2x_0$.

- Montrer que les deux points critiques de g sont $(0, 1)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}})$. (Présentez une résolution de système !)

Correction : On détermine les deux points critiques en utilisant les deux conditions déterminées précédemment.

- Si $x_0 = 0$ alors $\nabla g(0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y_0 \ln(y_0) \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow y_0 \ln(y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0$ ou $\ln y_0 = 0$. La seule possibilité est $y_0 = 1$ car g n'est pas définie en $(0, 0)$.

Un premier point critique est $(0, 1)$.

- Si $y_0 = -2x_0$, on exprime le gradient en fonction de x_0 uniquement :

$$\nabla g(x_0, -2x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \ln(x_0 - 2x_0) + x_0 \\ 4x_0 \ln(x_0 - 2x_0) + 2x_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Les 2 équations sont équivalentes : on résout $2x_0 \ln(-x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ou $2 \ln(-x_0) + 1 = 0$. Le cas $x_0 = 0$ est impossible (on obtiendrait le point $(0, 0)$) donc il reste $2 \ln(-x_0) + 1 = 0$, soit $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Le second point critique est $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}})$.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de g .

Correction :

$$a(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2 \ln(x + y) + \frac{2x}{x + y} + 1.$$

$$b(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2x}{x + y}.$$

$$c(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -2 \ln(x + y) - \frac{2y}{x + y}.$$

4. Déterminer la nature des points critiques de g . (*minimum, maximum ou point selle*).

Correction : • En $(0, 1)$, on a $a(0, 1) = 0 + 0 + 1 = 1$, $b(0, 1) = 0$ et $c(0, 1) = -2$.

Donc $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = 0 - 1 \times (-2) = 2 > 0$. Il s'agit d'un point selle.

• En $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}})$, on a $a(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = -1 - 2 + 1 = -2$, $b(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = -2 = -2$ et $c(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) = 1 - 4 = -3$. Donc $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = 4 - (-2) \times (-3) = -2 < 0$. Comme $a(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) < 0$, il s'agit d'un maximum local.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)

Soit V le champ de vecteurs défini par $\vec{V}(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$ où g est une fonction

de classe $\mathcal{C}^1$ au moins définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{U} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$(**) \quad \forall r > 0, \quad r g'(r) + 4g(r) = 0.$$

Correction : Le champ de vecteur $\vec{V}$ doit satisfaire l'équation $\operatorname{div} \vec{V} = \vec{0}$. À l'aide du formulaire, on calcule

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \operatorname{div} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix} + \nabla(g(\sqrt{x^2 + y^2})) \cdot \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix} = 4z \text{ et } \nabla(g(\sqrt{x^2 + y^2})) = \frac{g'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) &= 4zg(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{g'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times (z(x^2 + y^2)) \\ &= z \left(4g(\sqrt{x^2 + y^2}) + \sqrt{x^2 + y^2} g'(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \end{aligned}$$

On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z \neq 0$. On en déduit que $4g(r) + r g'(r) = 0$.

2. Déterminer la fonction g satisfaisant $(**)$ ainsi que la condition initiale $g(1) = 2$.

Correction : À l'aide du formulaire, on obtient $g(r) = \frac{2}{r^4}$ et $\vec{V}(x, y, z) = \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U}(x, y, z) = \mathbf{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(z)f(x, y) \end{pmatrix}$.

Correction : On résout $\mathbf{rot} \vec{U} = \vec{V}$.

Tout d'abord, $\vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(z)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -h(z)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$\mathbf{rot} \vec{U} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} h'(z)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ h'(z)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -h(z)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2z^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $h(z) = -z^2$ (ou $h'(z) = -2z$) et $f(x, y) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)} + K$, $K \in \mathbb{R}$.
On a bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^3} - \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^3} \right) \\ &= -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

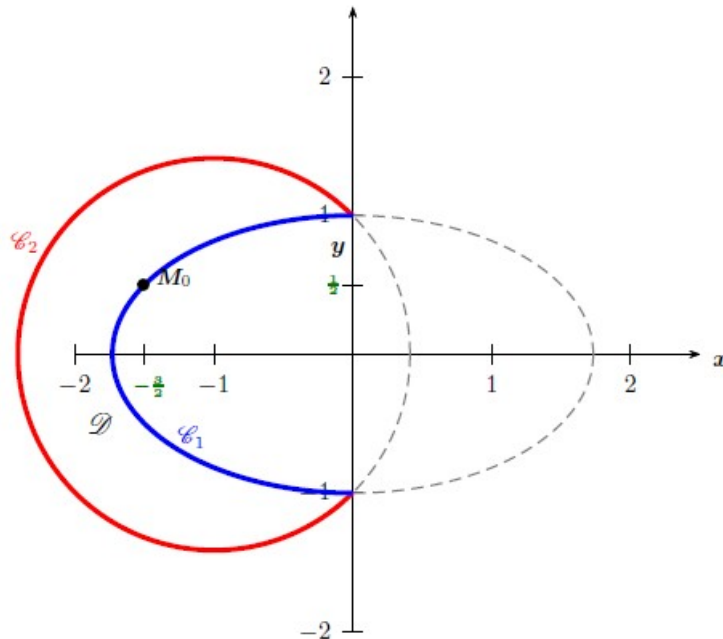
Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)

On considère le domaine défini par

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{3} + y^2 \geq 1, \text{ et } (x+1)^2 + y^2 \leq 2 \right\}.$$

1. Faire une figure. (Notez que $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont les deux points d'extrémités de $\mathcal{C}$.)

Correction :



2. Paramétrer le bord $\mathcal{C}$ du domaine $\mathcal{D}$.

Correction : Le bord $\mathcal{C}$ du domaine $\mathcal{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \exists t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \exists \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathcal{C}$.

(a) Placer le point M_0 sur votre figure.

Correction : Voir la figure.

(b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 .

Correction : On cherche θ_0 de sorte que $M_0 = \Phi_1(\theta_0)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos \theta_0 = -\frac{3}{2} \\ \sin \theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{5\pi}{6} [2\pi].$$

Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = M_0 + \lambda \Phi_1'(\frac{5\pi}{6}) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3+\lambda\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\lambda\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 .

Correction : La seconde ligne implique $\lambda = \frac{1-2y}{\sqrt{3}}$. Par substitution dans la première composante, on trouve

$$x = -\frac{3 + (1 - 2y)}{2} = -2 + y \Leftrightarrow \boxed{y = x + 2}.$$