Médian MT22 - A2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$ si $x+y \neq 0$ et $f(0,0) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide du chemin $(t, -t + \lambda t^2)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à choisir judicieusement, justifier que f n'est pas continue en $(0,0)$.

   Correction : Un choix possible est $\lambda = -\ell$.
   On obtient $f(t, -t - \ell t^2) = -\frac{t^2}{\ell t^2} = -\frac{1}{\ell} \underset{t \to 0}{\to} -\frac{1}{\ell} \neq \ell = f(0,0)$.
   En effet $-\frac{1}{\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible.
   Quel que soit le choix de $\ell \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = x\sqrt{x+y}$ pour $x+y \geq 0$.

   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de g en $(0,0)$, puis pour $(x,y) \neq (0,0)$.

   Correction : • Pour $(x,y) \neq (0,0)$ (et $x+y > 0$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}} = \sqrt{x+y} + \frac{1}{2}\sqrt{f(x,y)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2}\sqrt{f(x,y)}.$$

   • Pour $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h} \underset{h \to 0}{\to} \boxed{A = 0}.$$

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{0 \times \sqrt{k} - 0}{k} = 0 \underset{k \to 0}{\to} \boxed{B = 0}.$$

   (b) Montrer que la fonction g est différentiable en $(0,0)$.

   Correction : • On détermine la fonction $\varepsilon(h,k)$

$$f(h,k) = f(0,0) + Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

$$f(0,0) = A = B = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon(h,k) = \frac{h\sqrt{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}}}.$$

   On pose $\varepsilon(0,0) = 0$ et on démontre la C.S. de continuité en $(0,0)$: on pose $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sqrt{r\cos\theta + r\sin\theta} = \sqrt{r} \times \cos\theta\sqrt{\cos\theta + \sin\theta}.$$

Comme $|\cos\theta| \leq 1$ et $\sin\theta| \leq 1$, on a $|\cos\theta\sqrt{\cos\theta+\sin\theta}| \leq \sqrt{2}$.

$$\forall\theta \in [0, 2\pi[, \quad |\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| \leq g(r) = \sqrt{2r}.$$

Comme $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, on en déduit que $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} = 0$. La fonction g est différentiable en $(0,0)$.

(c) La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières continues en $(0,0)$?
Correction : Aucune des dérivées partielles premières n'est continue en $(0,0)$ car la foction f ne l'est pas.

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(x,y) = \dfrac{\lambda x + y}{1+x^2+y^2}$.

1. Calculer le gradient de f.
   Correction : la fonction f est un quotient de polynômes, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}^2$.
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{1+x^2+y^2} - \dfrac{2x(\lambda x+y)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{1}{1+x^2+y^2} - \dfrac{2y(\lambda x+y)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda - \lambda x^2 + \lambda y^2 - 2xy)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{1+x^2-y^2-2\lambda xy}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$
2. (a) Étudier l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour montrer que les points critiques (x_0, y_0) de f vérifient $x_0 = \lambda y_0$.
   Correction :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\lambda x+y)(x-\lambda y)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \quad y+\lambda x = 0 \text{ ou } x-\lambda y = 0.$$
   Or, l'expression du gradient montre que $\lambda x + y = 0 \Rightarrow \nabla f(x,y) \neq \vec{0}$. Donc les points critiques (x_0,y_0) satisfont $\boxed{x_0 = \lambda y_0}$.

   (b) Déterminer, en fonction de λ, les deux points critiques de f.
   Correction : On pose $x = \lambda y$ dans le system $\nabla f(x,y) = \vec{0}$. On obtient sur la seconde ligne
$$1 + \lambda^2 y^2 - y^2 - 2\lambda^2 y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{1+\lambda^2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$
   Les deux points critiques sont $(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}})$ et $(-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}})$.
3. Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0$.
   (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   Correction : Pour $\lambda = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$.
$$a(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$b(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8xy^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$c(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{6y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8y^3}{(1+x^2+y^2)^3}$$

(b) En déduire la nature des points critiques $(0,1)$ et $(0,-1)$ identifiés à la question **2.** *(minimum, maximum ou point selle).*

Correction : • En $(0,1)$, on a $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ et $c=-\frac{1}{2}$. Donc $\widetilde{\Delta}=b^2-ac=-\frac{1}{4}<0$ Comme $a<0$, il s'agit d'un maximum local.

• En $(0,-1)$, on a $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ et $c=\frac{1}{2}$. Donc $\widetilde{\Delta}=b^2-ac=-\frac{1}{4}<0$ Comme $a>0$, il s'agit d'un minimum local.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ un paramètre. Soit g et h deux applications définies sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ au moins. On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,x>0\}$ par

$$\vec{V}(M)=\begin{pmatrix} y\ln x+\alpha y\\ x\ln x-g(y)h(z)\\ g(y)h(z)\end{pmatrix}\quad \text{et } \vec{V}(1,0,0)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\alpha_0,\quad$ et $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} g'(y)=\lambda g(y)\\ h'(z)=-\lambda h(z)\end{cases}$
où α_0 est un réel à préciser. Puis donner une expression algébrique des fonctions g et h satisfaisant la condition initiale sur $\vec{V}$.

Correction :

$$\mathbf{r\vec{o}t}\vec{V}(M)=\begin{pmatrix} g'(y)h(z)+g(y)h'(z)\\ 0\\ \ln x+1-(\ln x+\alpha)\end{pmatrix}==\begin{pmatrix} g'(y)h(z)+g(y)h'(z)\\ 0\\ 1-\alpha\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\alpha=1$ et $g'(y)h(z)+g(y)h'(z)=0$. On utilise le critère

$$ad-bc=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

avec $a=h(z)$, $d=g'(y)$, $b=g(y)$ et $c=h'(z)$.

$$\begin{cases} g'(y)=\lambda g(y)\\ h'(z)=-\lambda h(z)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \exists(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases} g(y)=C_1e^{\lambda y}\\ h(z)=C_2e^{-\lambda z}.\end{cases}$$

La condition initiale est satisfaite pour $C_1=C_2=1$. Le champ de vecteur $\vec{V}$ s'écrit donc

$$\vec{V}(M)=\begin{pmatrix} y\ln x+y\\ x\ln x-e^{\lambda(y-z)}\\ e^{\lambda(y-z)}\end{pmatrix}$$

2. Déterminer la forme générale des fonctions $f:D\to\mathbb{R}$ telles que $\vec{V}=\nabla f$. *(Distinguer les cas $\lambda\neq 0$ et $\lambda=0$.)*

Correction : Posons $\nabla f=\vec{V}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y\ln x+y(L_1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x\ln x-e^{\lambda(x-y)}(L_2)\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= e^{\lambda(x-y)}(L_3)\end{cases}$$

• Pour $\lambda \neq 0$.
On intègre L_2 par rapport à y pour obtenir

$$f(x,y,z) = xy\ln x - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(y-z)} + C_1(x,z).$$

On substitue cette expression dans L_1 et on obtient

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow C_1(x,z) = C_2(z).$$

On substitue cette expression dans L_3 et on obtient
$C_2'(z) = 0 \Rightarrow \exists \boxed{K \in \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xy\ln x - e^{\lambda(x-y)} + K.}$
• Pour $\lambda = 0$.
On intègre L_2 par rapport à y pour obtenir

$$f(x,y,z) = xy\ln x - y + C_1(x,z).$$

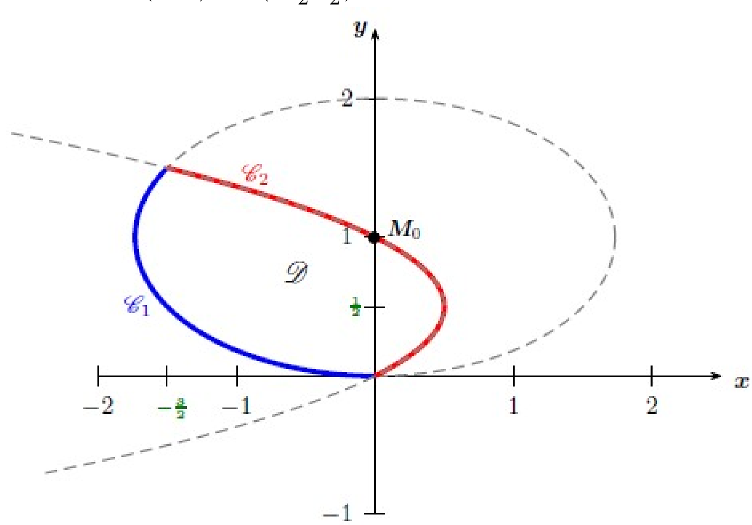
On substitue cette expression dans L_1 et on obtient

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow C_1(x,z) = C_2(z).$$

On substitue cette expression dans L_3 et on obtient
$C_2'(z) = 1 \Rightarrow \exists \boxed{K \in \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xy\ln x - y + z + K.}$

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{x^2}{3} + (y-1)^2 \ \leq 1 \ \text{ et } \ 2x + (2y-1)^2 \leq 1\right\}$.
On notera $\mathscr{C}$ le bord de $\mathscr{D}$.

1. Faire une figure. *(Noter que* $(0,0)$ *et* $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ *sont les deux sommets de* $\mathscr{C}$*.)*



2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.

   Correction : Le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$ est composé de deux morceaux de courbes $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ 1+\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [0, \frac{3}{2}],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1-(2t-1)^2}{2} \\ t \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M_0(0,1) \in \mathscr{C}$.

   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.

   Correction : Voir la figure.

   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

   Correction : Le point M_0 est situé sur la courbe $\mathscr{C}_2$ et on a $M_0 = \Phi_2(1)$. Un vecteur directeur de la tangente est $\Phi_2(1)$.

$$\Phi_2'(t) = \begin{pmatrix} -2(2t-1) \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_2'(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Dans ce cas, les équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M_0 sont

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = M_0 + \lambda \Phi_2'(1) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

   Correction : La seconde ligne indique que $\lambda = y - 1$. Par substitution dans la première composante, on trouve

$$x = -2(y-1) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x + 2y = 2}.$$