Médian MT22 - A2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$ si $x+y \neq 0$ et $f(0,0) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide du chemin $(t, -t+\lambda t^2)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à choisir judicieusement, justifier que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = x\sqrt{x+y}$ pour $x+y \geq 0$.
   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de g en $(0,0)$, puis pour $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Montrer que la fonction g est différentiable en $(0,0)$.
   (c) La fonction g admet-elle des dérivées partielles premières continues en $(0,0)$?

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(x,y) = \dfrac{\lambda x + y}{1+x^2+y^2}$.

1. Calculer le gradient de f.
2. (a) Étudier l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour montrer que les points critiques (x_0, y_0) de f vérifient $x_0 = \lambda y_0$.
   (b) Déterminer, en fonction de λ, les deux points critiques de f.
3. Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0$.
   (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) En déduire la nature des points critiques $(0,1)$ et $(0,-1)$ identifiés à la question **2.** *(minimum, maximum ou point selle).*

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit g et h deux applications définies sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ au moins. On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x > 0\}$ par

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} y\ln x + \alpha y \\ x\ln x - g(y)h(z) \\ g(y)h(z) \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{V}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha_0, \quad$ et $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} g'(y) = \lambda g(y) \\ h'(z) = -\lambda h(z) \end{cases}$
   où α_0 est un réel à préciser. Puis donner <u>une</u> expression algébrique des fonctions g et h satisfaisant la condition initiale sur $\vec{V}$.
2. Déterminer la forme générale des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ telles que $\vec{V} = \nabla f$. *(Distinguer les cas $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$.)*

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)

On considère le domaine défini par $\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \dfrac{x^2}{3} + (y-1)^2 \; \leq 1 \;\text{ et }\; 2x + (2y-1)^2 \leq 1 \right\}$.

On notera $\mathscr{C}$ le bord de $\mathscr{D}$.

1. Faire une figure. *(Noter que* $(0,0)$ *et* $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ *sont les deux sommets de* $\mathscr{C}$*.)*
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(0,1) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.