

Final MT22 - A2025
Durée : 2h

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.

La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points - 50min)

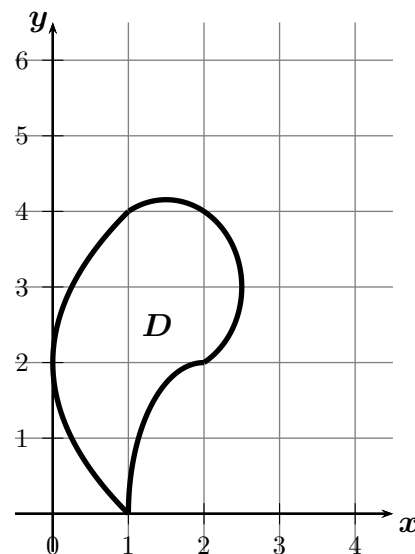
On définit les différentes parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (y - 2)^2 \leq 4x, x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 6 - 2x\},$$

$$D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{(y - 3)^2}{4/3} \leq 1 \text{ et } y \geq 6 - 2x\},$$

$$D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \leq 2 \text{ et } y \geq 0\}.$$

Le domaine $D = (D_1 \cup D_2) \setminus D_3$ est représenté ci-contre.



1. Cette question ne concerne que le domaine D_1 .

(a) Colorer ou hachurer le domaine D_1 sur la figure.

(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ en suite d'intégrales simples en x et en y .

(S'il y a lieu, indiquer les découpages effectués sur la figure.)

(c) Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_{D_1} (3 - y) dx dy = 7.$$

2. Cette question ne concene que le domaine D_2

(a) Paramétrer le bord $\mathcal{C}$ du domaine D_2 orienté dans le sens trigonométrique. (Indication : on décomposera $\mathcal{C}$ en deux chemins distincts.)

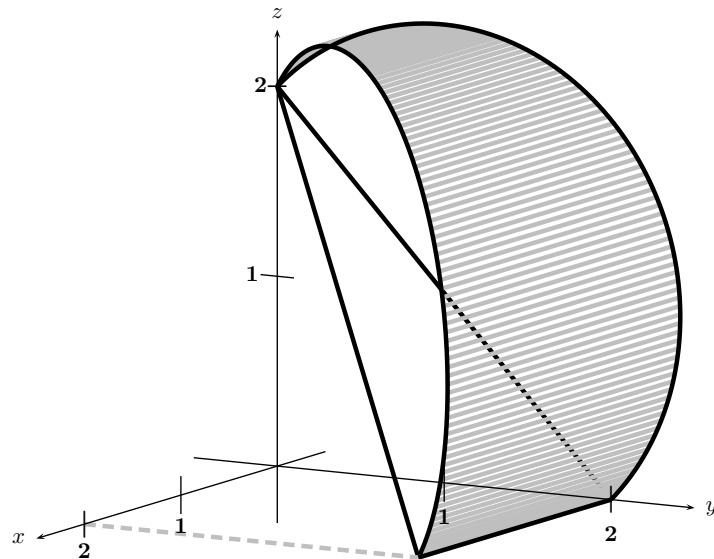
(b) Montrer, à l'aide de la paramétrisation, que $\int_{\mathcal{C}} (y - 3)^2 dx = -\frac{8}{9}$.

(c) À l'aide d'un théorème intégral, en déduire la valeur de $\iint_{D_2} (3 - y) dx dy$.

2. (a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_3} f(x, y) dx dy$ en suite d'intégrales simples.

(b) En déduire que $\iint_D (3 - y) dx dy = \frac{71}{9} - \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 10 points)
Les parties I et II sont indépendantes.



Partie I - (6 points - 40 min)

1. On considère le volume Ω ci-dessus défini par

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y, \text{ et } y+z \geq 2\}.$$

(a) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox) , transformer l'intégrale triple

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \text{ en suite d'intégrales simples.}$$

(b) Montrer que le volume de Ω est $V(\Omega) = \pi + \frac{4}{3}$.

2. On considère maintenant la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2, 0 \leq x \leq y, \text{ et } y+z \geq 2\}.$$

(a) Paramétrer Σ en coordonnées cylindriques.

(b) Montrer que l'aire de Σ est $\mathcal{A}(\Sigma) = (\pi + 2)\sqrt{2}$.

(c) Calculer directement le flux de $\vec{W}(0, y-x, x+z-2)$ à travers Σ . On orientera le champ des normales unitaires $\vec{n}$ vers l'extérieur de Ω .

3. On note $\mathcal{S}$ le bord du volume Ω , orienté par le champ des normales unitaires extérieures. Déterminer le flux de $\vec{W}$ à travers $\mathcal{S}$, de deux façons différentes. (*Indication : sans calcul intégral, justifier que le flux à travers les trois autres faces de Ω , soit $\mathcal{S} \setminus \Sigma$, est nul.*)

Partie II - (4 points - 30 min)

Soient $A(2, 2, 0)$, $B(0, 0, 2)$ deux points dans l'espace. On considère les courbes suivantes :

$\Gamma_1 :=$ le segment $[AB]$,

$\Gamma_2 :=$ la courbe définie par les équations cartésiennes $\begin{cases} (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \text{ et } y+z \geq 2, \\ x = y. \end{cases}$

1. Sur la figure ci-dessus, identifier et colorer la courbe fermée $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et indiquer le sens de parcours choisi sur la figure.

2. Paramétrer la courbe $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

3. Soit $\vec{U}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$.

À l'aide de la paramétrisation de $\mathcal{C}$, montrer que $\int_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

4. Peut-on conclure que le champ de vecteur $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire ?