

Final MT22 - A2025
Durée : 2h

Calculatrice interdite. Formulaire Recto A4 autorisé.

La rédaction est très importante, rédigez et détaillez clairement vos calculs !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points - 50min)

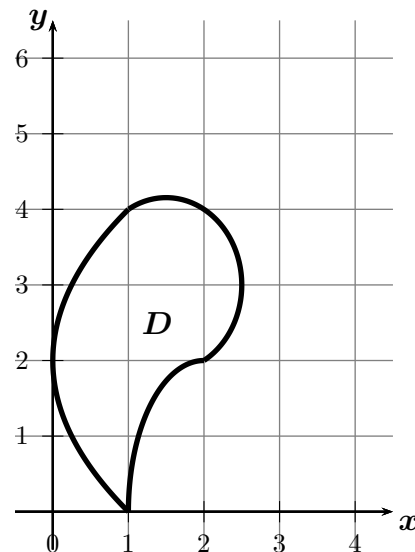
On définit les différentes parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (y - 2)^2 \leq 4x, x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 6 - 2x\},$$

$$D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{(y - 3)^2}{4/3} \leq 1 \text{ et } y \geq 6 - 2x\},$$

$$D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \leq 2 \text{ et } y \geq 0\}.$$

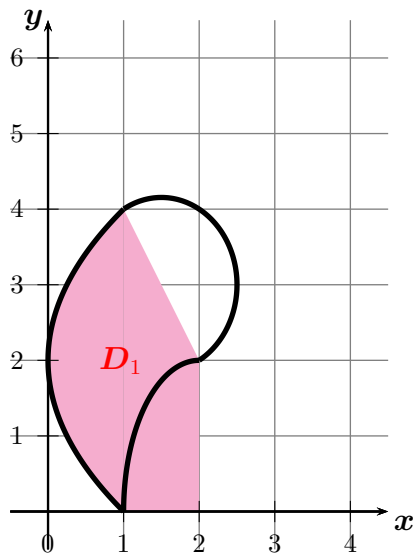
Le domaine $D = (D_1 \cup D_2) \setminus D_3$ est représenté ci-contre.



1. Cette question ne concerne que le domaine D_1 .

(a) Colorer ou hachurer le domaine D_1 sur la figure.

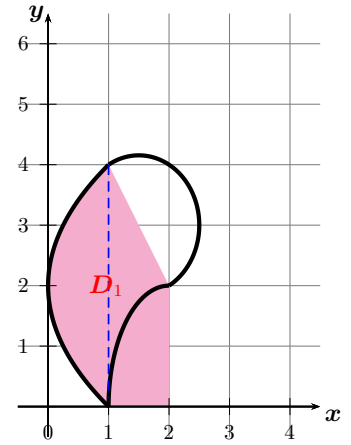
Correction :



(b) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ en suite d'intégrales simples en x et en y .
(S'il y a lieu, indiquer les découpages effectués sur la figure.)

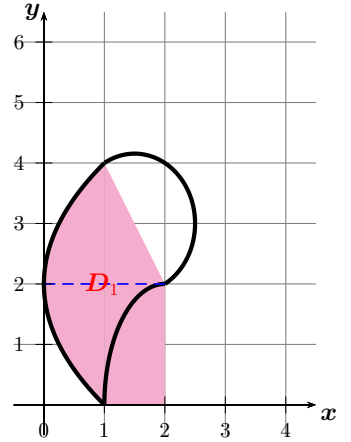
Correction : • Utilisation de la première formule de Fubini.

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{2-2\sqrt{x}}^{2+2\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{6-2x} f(x, y) dy \right) dx$$



• Utilisation de la deuxième formule de Fubini.

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{(y-2)^2}{4}}^2 f(x, y) dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{\frac{(y-2)^2}{4}}^{3-\frac{y}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$



(c) Avec l'une des formules précédentes, montrer que

$$\iint_{D_1} (3 - y) dx dy = 7.$$

Correction : Avec la première formule de Fubini :

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} y dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{2-2\sqrt{x}}^{2+2\sqrt{x}} (3 - y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{6-2x} (3 - y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{(3 - y)^2}{2} \right]_{2-2\sqrt{x}}^{2+2\sqrt{x}} dx + \int_1^2 \left[-\frac{(3 - y)^2}{2} \right]_0^{6-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{(1 - 2\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(1 + 2\sqrt{x})^2}{2} \right) dx + \int_1^2 -\frac{(2x - 3)^2 - 9}{2} dx \\ &= \int_0^1 4\sqrt{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^2 ((2x - 3)^2 - 9) dx \\ &= \left[4 \times x^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{(2x - 3)^3}{6} - 9x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} - 18 + \frac{1}{6} + 9 \right) = \boxed{7} \end{aligned}$$

Avec la deuxième formule de Fubini :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} y dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{(y-2)^2}{4}}^2 (3-y) dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{\frac{(y-2)^2}{4}}^{3-\frac{y}{2}} (3-y) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left[(3-y) \left(2 - \frac{(y-2)^2}{4} \right) \right] dy + \int_2^4 \left[(3-y) \left(3 - \frac{y}{2} - \frac{(y-2)^2}{4} \right) \right] dy \\
&= \int_0^2 \left((3-y) \left(1 + y - \frac{y^2}{4} \right) \right) dy + \int_2^4 \left((3-y) \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right) \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(3 + 2y - \frac{7y^2}{4} + \frac{y^3}{4} \right) dy + \int_2^4 \left(6 - \frac{y}{2} - \frac{5y^2}{4} + \frac{y^3}{4} \right) dy \\
&= \left[3y + y^2 - \frac{7y^3}{12} + \frac{y^4}{16} \right]_0^2 + \left[6y - \frac{y^2}{4} - \frac{5y^3}{12} + \frac{y^4}{16} \right]_2^4 \\
&= (6 + 4 - \frac{14}{3} + 1) + (24 - 4 - \frac{80}{3} + 16 - 12 + 1 + \frac{10}{3} - 1) = \frac{19}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{7}
\end{aligned}$$

2. Cette question ne concene que le domaine D_2

(a) Paramétrer le bord $\mathcal{C}$ du domaine D_2 orienté dans le sens trigonométrique. (*Indication : on décomposera $\mathcal{C}$ en deux chemins distincts.*)

Correction : On décompose $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ comme sur la figure ci-contre.

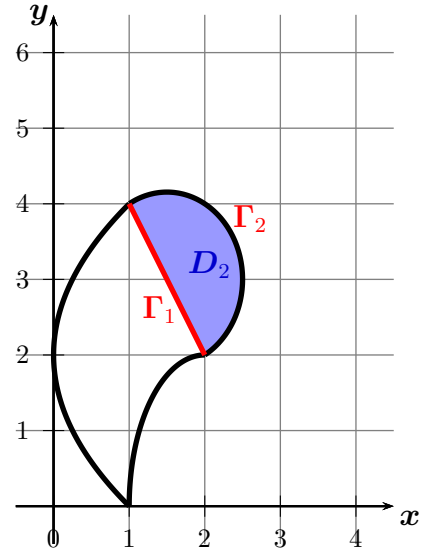
- $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \exists t : 1 \rightarrow 2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 6-2t \end{pmatrix}$

- La courbe Γ_2 est une portion d'ellipse de centre $(\frac{3}{2}, 3)$ et de rayons $a = 1$ sur (Ox) et $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sur (Oy) . Pour le domaine de définition de l'angle θ il faut chercher les coordonnées polaires des sommets $(2, 2)$ et $(1, 4)$. On résout les systèmes suivants

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \cos \theta = 2 \\ y = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

et $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \cos \theta = 1 \\ y = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \exists t : -\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{3}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \cos \theta \\ 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{pmatrix}$$



(b) Montrer, à l'aide de la paramétrisation, que $\int_{\mathcal{C}} (y-3)^2 dx = -\frac{8}{9}$.

Correction : Par relation de Chasles, on a

$$\int_{\mathcal{C}} (y-3)^2 dx = \int_{\Gamma_1} (y-3)^2 dx + \int_{\Gamma_2} (y-3)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} (y-3)^2 dx &= \int_1^2 (3-2t)^2 \times 1 dt \\ &= \left[\frac{(3-2t)^3}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_1^2 = \boxed{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} (y-3)^2 dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4}{3} \sin^2 \theta \times (-\sin \theta) d\theta = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos^2 \theta)(-\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \times \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \boxed{-\frac{11}{9}}\end{aligned}$$

Par sommation, on obtient $\int_{\mathcal{C}} (y-3)^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \boxed{-\frac{8}{9}}$.

(c) À l'aide d'un théorème intégral, en déduire la valeur de $\iint_{D_2} (3-y) dx dy$.

Correction : En posant $P(x, y) = (y-3)^2$ et $Q(x, y) = 0$, on obtient $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -2(y-3) = 2(3-y)$. D'après le théorème de Green-Riemann, on a

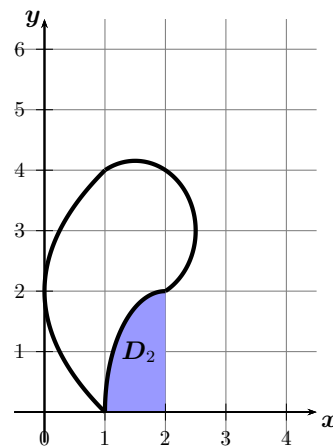
$$\int_{\mathcal{C}} (y-3)^2 dx = 2 \iint_{D_2} (3-y) dx dy \Rightarrow \boxed{\iint_{D_2} (3-y) dx dy = -\frac{4}{9}}$$

3. (a) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_3} f(x, y) dx dy$ en suite d'intégrales simples.

Correction :

Le domaine D_3 est l'intérieur d'un quart d'ellipse de centre $(2, 0)$ et de rayons $a = 1$ sur (Ox) et $b = 2$ sur (Oy) . Le jacobien est $J = abr = 2r$.

$$\iint_{D_3} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2r \times f(2+r \cos \theta, 2r \sin \theta) d\theta \right) dr.$$



(b) En déduire que $\iint_D (3-y) dx dy = \frac{71}{9} - \frac{3\pi}{2}$.

Correction : On doit effectuer le calcul

$$\iint_D (3-y) dx dy = \iint_{D_1} (3-y) dx dy + \iint_{D_2} (3-y) dx dy - \iint_{D_3} (3-y) dx dy.$$

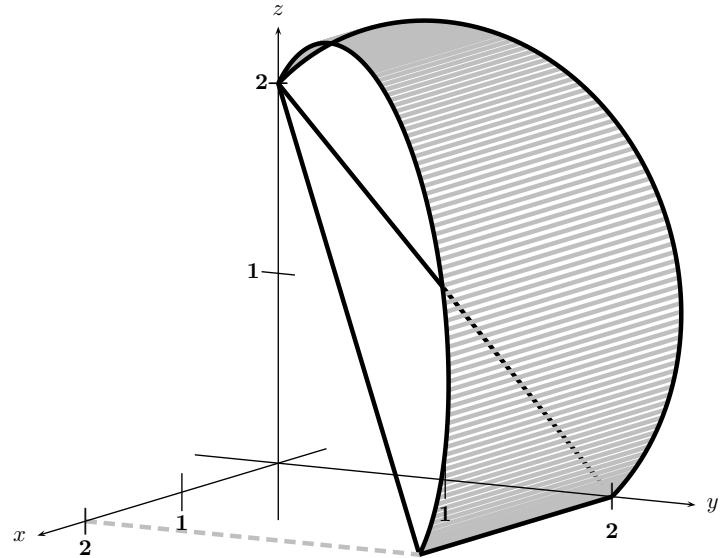
On a déjà $\iint_{D_1} (3-y) dx dy = 7$ et $\iint_{D_2} (3-y) dx dy = -\frac{4}{9}$. Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \iint_{D_3} (3-y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2r \times (3-2r \sin \theta) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 [6r\theta + 4r^2 \cos \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dr = \int_0^1 (3r\pi - 4r^2) dr = \left[\frac{3r^2\pi}{2} - \frac{4r^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \iint_D (3-y) dx dy = 7 - \frac{4}{9} - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3} \right) = \frac{71}{9} - \frac{3\pi}{2}.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 10 points)

Les parties *I* et *II* sont indépendantes.



Partie I - (6 points - 40 min)

1. On considère le volume Ω ci-dessus défini par

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y, \text{ et } y+z \geq 2\}.$$

- (a) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Ox) , transformer l'intégrale triple $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : • L'encadrement du bâton est donné dans l'énoncé :

$$\boxed{0 \leq x \leq y}.$$

- Il reste à déterminer le domaine de définition des variables (y, z) :

$$D := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 ; (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 2 \text{ et } y+z \geq 2\}$$

Ce domaine correspond à la projection du volume sur le plan $x=0$. Il s'agit d'un demi disque de rayon $\sqrt{2}$ et de centre $(1,1)$. On le paramétrise en coordonnées polaires.

$$D := \{(y = 1 + r \cos \theta, z = 1 + r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 ; r \in [0, \sqrt{2}] \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}.$$

Le jacobien vaut $J = abr = r$. On obtient

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^y f(x, y, z) \right) dy dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^{1+r \cos \theta} f(x, 1+r \cos \theta, 1+r \sin \theta) \times r dx \right) d\theta \right) dr.\end{aligned}$$

- (b) Montrer que le volume de Ω est $V(\Omega) = \pi + \frac{4}{3}$.

Correction :

$$\begin{aligned}V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^{1+r \cos \theta} r dx \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r(1+r \cos \theta) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} [r(\theta + r \sin \theta)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (r\pi + r^2 \sqrt{2}) dr = \left[\frac{r^2 \pi}{2} + \frac{r^3 \sqrt{2}}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{\pi + \frac{4}{3}}\end{aligned}$$

2. On considère maintenant la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2, 0 \leq x \leq y, \text{ et } y+z \geq 2\}.$$

- (a) Paramétrer Σ en coordonnées cylindriques.

Correction : La surface Σ est hachurée sur la figure. On choisit comme paramètre cylindriques (x, φ) car le cylindre est d'axe (Ox) .

$$\text{paramétrisation : } M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists (x, \varphi) \in \Delta, \begin{pmatrix} x \\ 1 + \sqrt{2} \cos \varphi \\ 1 + \sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

où Δ est défini comme suit

$$\Delta = \{(x, \varphi) \in \mathbb{R}^2; \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \text{ et } 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \cos \varphi\}$$

- (b) Montrer que l'aire de Σ est $\mathcal{A}ire(\Sigma) = (\pi + 2)\sqrt{2}$.

Correction : Calcul du jacobien :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \sin \varphi \\ \sqrt{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \cos \varphi \\ -\sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{t}_x \wedge \vec{t}_\varphi\| = \sqrt{2}.$$

On en déduit,

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 d\sigma = \iint_{\Delta} \sqrt{2} dx d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}(1 + \sqrt{2} \cos \varphi) d\varphi = \left[\sqrt{2}(\varphi + \sqrt{2} \sin \varphi) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} + 2\sqrt{2}.$$

- (c) Calculer directement le flux de $\vec{W}(0, y - x, x + z - 2)$ à travers Σ . On orientera le champ des normales unitaires $\vec{n}$ vers l'extérieur de Ω .

Correction : Le champ des normales unitaires dirigé vers l'extérieur de Ω est

$$\boxed{\vec{N} = -\vec{t}_x \wedge \vec{t}_\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix}. \text{ On a}$$

$$\vec{W} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \sqrt{2} \cos \varphi - x \\ x - 1 + \sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix} = (1 - x)\sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi) + \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{W}) &= \sqrt{2} \mathcal{A}ire(\Sigma) + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{1+\sqrt{2} \cos \varphi} (1 - x)\sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \\ &= 2\pi + 4 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[-\frac{(1-x)^2}{2} \times \sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi) \right]_0^{1+\sqrt{2} \cos \varphi} d\varphi \\ &= 2\pi + 4 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\sqrt{2} \cos^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \\ &= 2\pi + 4 + \left[\frac{\sqrt{2} \sin^3 \varphi}{3} - \frac{\sqrt{2} \cos^3 \varphi}{3} - \sqrt{2} \sin \varphi \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\pi + 4 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 \right) = 2\pi + 4 - \frac{4}{3} = \boxed{2\pi + \frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{S}$ le bord du volume Ω , orienté par le champ des normales unitaires extérieures. Déterminer le flux de $\vec{W}$ à travers $\mathcal{S}$, de deux façons différentes. (*Indication : sans calcul intégral, justifier que le flux à travers les trois autres faces de Ω , soit $\mathcal{S} \setminus \Sigma$, est nul.*)

Correction : • Par relation de Chasles, le flux total à travers $\mathcal{S}$ est la somme des flux à travers chaque face.

Sur la face située dans le plan $x = 0$ on a $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z - 2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc le flux est nul.

Sur la face située dans le plan $x = y$, un vecteur normal est $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x + z - 2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$. Donc le flux est nul.

Sur la face située dans le plan $x + z = 2$, on a $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ y - x \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$. Donc le flux est nul.

Il reste $\boxed{\mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{W}) = \mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{W}) = 2\pi + \frac{8}{3}}$.

• D'après le théorème de Gauss-Ostrogradski, on doit avoir

$$\mathcal{F}lux_\Sigma(\vec{W}) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{W} dx dy dz = \iiint_\Omega (2) dx dy dz = 2V(\Omega) = 2(\pi + \frac{4}{3}) = \boxed{2\pi + \frac{8}{3}}.$$

Partie II - (4 points - 30 min)

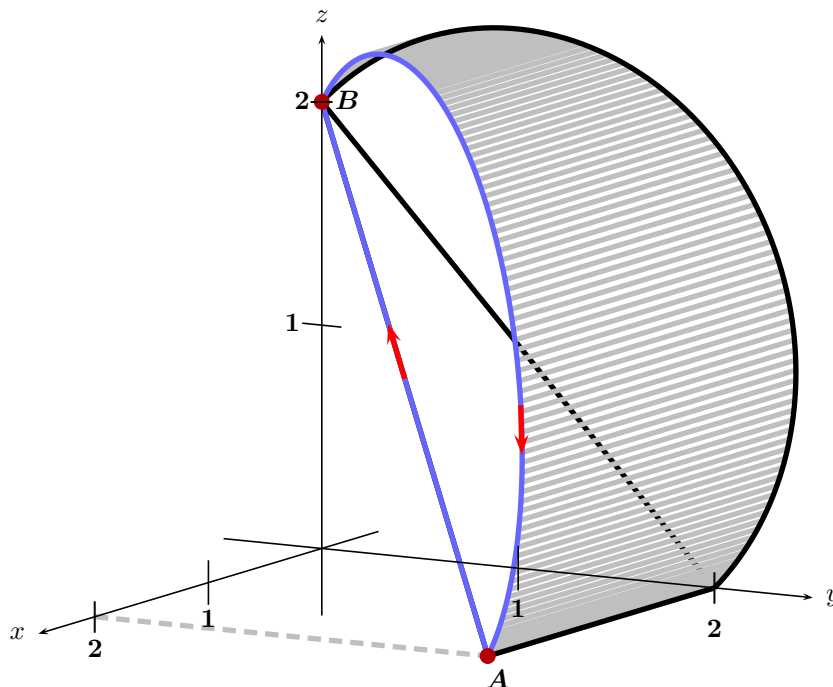
Soient $A(2, 2, 0)$, $B(0, 0, 2)$ deux points dans l'espace. On considère les courbes suivantes :

Γ_1 := le segment $[AB]$,

Γ_2 := la courbe définie par les équations cartésiennes $\begin{cases} (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \text{ et } y+z \geq 2, \\ x = y. \end{cases}$

1. Sur la figure ci-dessus, identifier et colorer la courbe fermée $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et indiquer le sens de parcours choisi sur la figure.

Correction :



2. Paramétrer la courbe $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (1.5 point)

Correction :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_1 = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists t : 0 \rightarrow 1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 2(1-t) \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \exists \theta : \frac{3\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 + \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit $\vec{V}$ le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$.

À l'aide de la paramétrisation de $\mathcal{C}$, montrer que $\int_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0$. (1.5 point)

Correction : Par relation de Chasles, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} z dx + y dz = \int_{\Gamma_1} z dx + y dz + \int_{\Gamma_2} z dx + y dz$$

$$\int_{\Gamma_1} z \, dx + y \, dz = \int_0^1 (2t \times (-2)dt + 2(1-t) \times 2dt) = \int_0^1 (4-8t)dt = \left[4t-4t^2\right]_0^1 = \boxed{0}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} z \, dx + y \, dz &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left((1 + \sqrt{2} \sin \theta) \times (-\sqrt{2} \sin \theta) d\theta + (1 + \sqrt{2} \cos \theta) \times \sqrt{2} \cos \theta d\theta \right) \\ &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta) + 2 \cos(2\theta) \right) d\theta = \left[\sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta) + \sin(2\theta) \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} = 0 \end{aligned}$$

D'où $\int_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = \boxed{0}$.

4. Peut-on conclure que le champ de vecteur $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire ? (0.5 point)

Correction : Il suffit de vérifier le critère $\mathbf{rot} \vec{U} = \vec{0}$:

$$\mathbf{rot} \vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Non, le vecteur $\vec{U}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.