

Exercice 1. (7 points)

1. Soit n un entier non-nul. On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + |y|^n} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Étudier la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$ lorsque $n \geq 3$.
(b) Montrer que, si $|y| \leq 1$ alors

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + |y|^n \quad \text{pour tout } 1 \leq n < 3.$$

- (c) Étudier la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$, lorsque $1 \leq n < 3$.
(d) Pour quelle valeurs de n les dérivées partielles premières de f existent-elles au point $(0, 0)$?

2. On suppose désormais que $n = 2$, étudier les questions suivantes :

- (a) La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$?
(b) Les dérivées partielles de f sont-elles continues au point $(0, 0)$?

Exercice 2. (4 points)

1. Soient α et β deux réels non-nuls. On considère l'équation suivante, dite équation de Burgers :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (1)$$

On suppose dans cette partie que $f(t, x) = \frac{x^\beta}{t^\alpha}$.

- (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$.
(b) Trouver les valeurs de α et β pour que f soit une solution de l'équation de Burgers (1).
2. On suppose dans cette partie que f est une fonction différentiable vérifiant l'équation (1) et g est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation suivante :

$$g'(t) = f(t, g(t)).$$

- (a) On note $h(t) = f(t, g(t))$, calculer $h'(t)$ en fonction des dérivées partielles premières de f .
(b) En déduire une expression simplifiée de h , lorsque de $f(0, x) = f_0(x)$ et $g(0) = g_0$.

Exercice 3. (5 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(x - y) - \ln(x^2 + y^2 + 1), \quad \text{pour tout } x > y.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
2. En déduire les points critiques de f .
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
4. Étudier la nature des points critiques.

Exercice 4. (4 points) Soient α, β deux réelles non-nuls et g une fonction dérivable définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g'(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V} = (g(\alpha x + \beta y), g(\alpha x + \beta y), 1).$$

1. Sous quelles conditions portant sur α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
2. Soit G une primitive de g . On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f . Déterminer dans ce cas f en fonction de G .
3. Pour quelle valeur α_0 de α et β_0 de β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur ?
4. On se place dans le cas $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$ et on suppose que $\vec{V} = \text{rot}(\vec{U})$ avec

$$\vec{U} = (\phi(y), \psi(x), R(x - y)) \quad \text{et} \quad \phi(0) = \psi(0) = 0.$$

Déterminer la forme générale des fonctions ψ, ϕ et R . En déduire la forme de $\vec{U}$.