

Exercice 1. (7 points)

1. Soit n un entier non-nul. On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + |y|^n} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Étudier la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$ lorsque $n \geq 3$.

Corrigé (1 pt) : On peut voir que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y) = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^3}{|y|^n} = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^{n-3}} = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 3 \\ +\infty & \text{si } n > 3. \end{cases}$$

Du coup, f n'est pas continue en $(0, 0)$ dans ce cas.

- (b) Montrer que, si $|y| \leq 1$ alors

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + |y|^n \quad \text{pour tout } 1 \leq n < 3.$$

Corrigé (1 pt) : Si $|y| \leq 1$, alors nous avons $|y|^2 \leq |y|$. On déduit que $y^2 \leq |y|^n$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Par conséquent,

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + |y|^n \quad \text{pour tout } 1 \leq n < 3.$$

- (c) Étudier la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$, lorsque $1 \leq n < 3$.

Corrigé (1 pt) : On considère les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. En utilisant la question précédente, on peut vérifier que pour $0 < r \leq 1$, nous avons

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - f(0, 0)| \leq \left| \frac{r^3(\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta))}{r^2} \right| \leq 2r.$$

Du coup, $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = f(0, 0) = 0$. Alors f est continue en $(0, 0)$ dans ce cas.

- (d) Pour quelles valeurs de n les dérivées partielles premières de f existent-elles au point $(0, 0)$? Justifier.

Corrigé (2 pt) : Par la définition des dérivées partielles on peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2}{|k|^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n < 2 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ -\infty & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

2. On suppose désormais que $n = 2$, étudier les questions suivantes :

- (a) La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$?

Corrigé (1 pt) : Dans ce cas, on sait que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Il suffit alors d'étudier la limite suivante

$$\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \epsilon(h, k) = \lim_{(h, k) \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - h - k - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow 0} \frac{h^3 - k^3}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h - k}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On passe en coordonnées polaires, on obtient que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \epsilon(h, k) = \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \cos^3(\theta) - \sin^3(\theta) - (\cos(\theta) - \sin(\theta)).$$

Cette limite est différente de 0 lorsque $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Du coup, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

- (b) Les dérivées partielles de f sont-elles continues au point $(0, 0)$?

Corrigé (1 pt) : Étant donnée que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ et f est anti-symétrique lorsque $n = 2$ ($f(x, y) = -f(y, x)$), on conclut que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0, 0)$.

Exercice 2. (5 points)

1. Soient α et β deux réels non-nuls. On considère l'équation suivante, dite équation de Burgers :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (1)$$

On suppose dans cette partie que $f(t, x) = \frac{x^\beta}{t^\alpha}$.

- (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de α et β .

Corrigé (2 pts) : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \beta \frac{x^{\beta-1}}{t^\alpha}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\alpha \frac{x^\beta}{t^{\alpha+1}}.$$

- (b) Trouver les valeurs de α et β pour que f soit une solution de l'équation de Burgers (1).

Corrigé (1 pt) : Si f est une solution de (1), alors nous avons $\alpha \frac{x^\beta}{t^{\alpha+1}} = \beta \frac{x^{2\beta-1}}{t^{2\alpha}}$. Ce qui implique que $\alpha t^{\alpha-1} = \beta x^{\beta-1}$ et par conséquent $\alpha = \beta = 1$.

2. On suppose dans cette partie que f est une fonction différentiable vérifiant l'équation (1) et g est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation suivante :

$$g'(t) = f(t, g(t)).$$

- (a) On note $h(t) = f(t, g(t))$, calculer $h'(t)$ en fonction des dérivées partielles premières de f .

Corrigé (1 pt) : Par la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient que

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, g(t)) + g'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, g(t)) + f(t, g(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)).$$

- (b) En déduire une expression simplifiée de h , lorsque de $f(0, x) = f_0(x)$ et $g(0) = g_0$.

Corrigé (1 pt) : Puisque f est une solution de l'équation (1), nous remarquons que

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, g(t)) + f(t, g(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)) = 0.$$

Du coup, $h(t) = h(0) = f(0, g(0)) = f_0(g_0)$.

Exercice 3. (6 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(x - y) - \ln(x^2 + y^2 + 1), \quad \text{pour tout } x > y.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .

Corrigé (1 pt) : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - y} - \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x - y} - \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

2. En déduire les points critiques de f .

Corrigé (2 pts) : On résout le système $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. À savoir,

$$\frac{1}{x - y} - \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{x - y} - \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = 0.$$

On additionne les deux équations on obtient

$$\frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

Du coup, $y = -x$ et par conséquent $\frac{1}{2x} - \frac{2x}{2x^2+1} = \frac{1-2x^2}{2x(2x^2+1)} = 0$. Cela implique que $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $x > y$ on déduit qu'il existe un seul point critique $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .

Corrigé (1,5 pts) : On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2(y^2 - x^2) + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2(x^2 - y^2) + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

4. Étudier la nature des points critiques ?

Corrigé (1,5 pts) : On peut vérifier que

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad \text{et} \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1.$$

Puisque $\Delta = 4(b^2 - ac) = -4 < 0$ et $a < 0$, on déduit que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ est un point de maximum.

Exercice 4. (5 points) Soient α, β deux réelles et g une fonction dérivable définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g'(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V} = (g(\alpha x + \beta y), g(\alpha x + \beta y), 1).$$

1. Sous quelles conditions portant sur α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Corrigé (1 pt) : $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus, on a $\text{rot}(\vec{V}) = (0, 0, (\alpha - \beta)g'(\alpha x + \beta y))$ et par conséquent $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ ssi $\beta = \alpha$.

2. Soit G une primitive de g . On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f . Déterminer dans ce cas f en fonction de G .

Corrigé (2 pts) : Dans ce cas, on sait que $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$, donc $\beta = \alpha$. On cherche maintenant une fonction f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = g(\alpha(x + y)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = g(\alpha(x + y)) \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 \quad (3)$$

On intègre l'équation (1) par rapport à x , on obtient

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} G(\alpha(x + y)) + g(y, z).$$

On dérive cette équation par rapport à y , on déduit, par l'équation (2), que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 0.$$

Cela montre que $g(y, z) = h(z)$ et par conséquent

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} G(\alpha(x + y)) + h(z).$$

Finalement, on dérive cette équation par rapport à z , on déduit, par l'équation (3), que $h'(z) = 1$. Alors $h(z) = z + c$, d'où

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} G(\alpha(x + y)) + z + c.$$

3. Pour quelles valeurs de α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur ?

Corrigé (1 pts) : $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur ssi $\text{div}(\vec{V}) = 0$, donc $(\alpha + \beta)g(\alpha x + \beta y) = 0$. Cela montre que $\alpha = -\beta$.

4. On se place dans le cas précédent et on suppose que $\vec{V} = \mathbf{rot}(\vec{U})$ avec

$$\vec{U} = (\phi(y), \psi(x), R(x-y)) \quad \text{et} \quad \phi(0) = \psi(0) = 0.$$

Déterminer la forme générale des fonctions ψ , ϕ et R . En déduire la forme de $\vec{U}$.

Corrigé (1 pts) : Dans ce cas, on sait que $\alpha = -\beta$. On commence à calculer

$$\mathbf{rot}(\vec{U}) = (-R'(x-y), -R'(x-y), \psi'(x) - \phi'(y)).$$

D'où

$$R'(x-y) = g(\alpha(x-y)) \quad (1)$$

$$R'(x-y) = g(\alpha(x-y)) \quad (2)$$

$$\psi'(x) - \phi'(y) = 1 \quad (3).$$

D'après (1) et (2), on a $R(x-y) = \frac{1}{\alpha}G(\alpha(x-y)) + K$. De plus, (3) montre que $\psi'(x) = 1 + \phi'(y) = a$. Par conséquent, $\psi(x) = ax + b$ et $\phi(y) = (a-1)y + c$. Vu que $\phi(0) = \psi(0) = 0$ on déduit que $\psi(x) = ax$ et $\phi(y) = (a-1)y$.