

Exercice 1. (9 points)

1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq x \leq 2, y \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, 0 \leq y \leq (x - 2)^2\}.$$

- (a) **(1 pt)** Faire une figure représentant D .

- (b) Exprimer à l'aide d'intégrales simples en x et en y l'intégrale double $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Corrigé (2 pts) : On a

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy$$

ou

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy \right] dx.$$

- (c) On suppose que la masse surfacique de D est $\mu(x, y) = x$. Calculer la masse totale de D , en utilisant une des expressions précédentes.

Corrigé (2 pts) : On a

$$\begin{aligned} m &= \int \int_D x dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2-\sqrt{y}} x dx \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2]_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2-\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 3 - 4\sqrt{y} + y + (y-1)^2 dy = \frac{1}{2} \left[3y - \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{C}$ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

- (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigé (1,5 pts) : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, avec

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \mathcal{C}_2 = \begin{cases} x = t \\ y = (t-2)^2 \end{cases} \quad 1 \leq t < 2,$$

et

$$\mathcal{C}_3 = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) + 1 \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0.$$

- (b) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (0, x^2)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigé (1,5 pts) : Puisque $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens trigonométrique, on peut voir que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) &= \int_{\mathcal{C}} x^2 dy = \int_{\mathcal{C}_1} x^2 dy + \int_{\mathcal{C}_2} x^2 dy + \int_{\mathcal{C}_3} x^2 dy \\ &= 0 + \int_2^1 2t^2(t-2)dt + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta) d\theta \\ &= \left[\frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} \right]_2^1 + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) - \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{11}{6} + \left[\sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

- (c) Retrouver la masse totale de D en utilisant la formule de Green-Riemann.

Corrigé (1 pts) : D'après la formule de Green-Riemann on sait que

$$\int_C x^2 dy = 2 \int \int_D x dx dy = 2m = \frac{7}{6}.$$

Exercice 2. (14 points)

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume défini par :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1\},$$

- (a) **(1 pt)** Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.
 (b) Soit D la projection de $\mathcal{V}$ sur la plan xOy . Faire une figure représentant le domaine D .

Corrigé (0.5 pt) : Le domaine D est le quart de disque passant par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

- (c) Exprimer, en utilisant la méthode bâtons, l'intégrale triple $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'une intégrale double sur D ainsi qu'une intégrale simple en z .

Corrigé (1 pt) : On a

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_D \left[\int_0^{1-x} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

- (d) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé (2 pts) : En utilisant la méthode de bâtons, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int \int \int_{\mathcal{V}} dx dy dz = \int \int_D \left[\int_0^{1-x} dz \right] dx dy = \int \int_D (1-x) dx dy$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. En effectuant le changement de variables $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ on peut vérifier que $(x, y) \in D$ ssi $(r, \theta) \in \Delta = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. De plus, puisque le déterminant Jacobien $|J| = r$ on obtient que

$$V(\mathcal{V}) = \int \int_{\Delta} (1-r \cos(\theta)) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos(\theta) \right) d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{3} \sin(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

2. Soit Σ la surface suivante :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1\}.$$

- (a) Paramétrer Σ en utilisant les coordonnées cylindriques.

Corrigé (1 pt) :

$$\Sigma = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 1 - \cos(\theta). \\ z = z \end{cases}$$

- (b) Calculer l'aire de Σ .

Corrigé (1 pt) : Vu que la normale à Σ est le vecteur

$\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \int \int_{\Sigma} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-\cos \theta} \|\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z\| dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-\cos \theta} dz d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos \theta d\theta = [\theta - \sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

- (c) On oriente Σ par la normale unitaire dont la deuxième composante est positive. Calculer le flux de $\vec{V} = (-x, y, 0)$ à travers la surface Σ .

Corrigé (2 pts) : Puisque, Σ est orientée suivant la normale $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ alors on déduit que

$$\phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int \int_{\Delta} \vec{V} \cdot (\vec{T}_{\theta} \wedge \vec{T}_z) d\theta dz.$$

où $\Delta_1 = \{0 \leq z \leq 1 - \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi_{\Sigma}(\vec{V}) &= \int \int_{\Delta_1} -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \cos^3(\theta) - \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(2\theta) + \cos(\theta) - 2\sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \left[-\frac{\sin(2\theta)}{2} + \sin(\theta) - \frac{2\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. On considère le champ de vecteurs $\vec{U} = (y, x, 0)$.

- (a) Montrer que le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Corrigé (0.5 pt) : Il suffit de montrer que $\text{rot}(\vec{U}) = \vec{0}$.

- (b) Soit Γ le bord de la surface Σ . Paramétrer la courbe Γ .

Corrigé (1,5 pts) : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, avec

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Gamma_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \quad 0 < z \leq 1,$$

et

$$\Gamma_3 = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = -\cos(\theta) + 1 \end{cases} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

- (c) Calculer de deux façons différentes la circulation $\vec{U}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).

Corrigé (1,5 pts) :

1^{ère} méthode : En choisissant n'importe quelle orientation, on a $\mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{U}) = 0$ car $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire et Γ est une courbe fermée.

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{U}) &= \int_{\Gamma} ydx + xdy = \int_{\Gamma_1} ydx + xdy + \int_{\Gamma_2} ydx + xdy + \int_{\Gamma_3} ydx + xdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) d\theta + 0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

4. On considère le champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, -xy)$.

- (a) Montrer que $\text{rot}(\vec{W}) = \vec{V}$.

Corrigé (0.5 pt) : On a $\text{rot}(\vec{W}) = (-x + 0, y + 0, 0 - 0) = \vec{V}$.

- (b) Calculer de deux façons différentes la circulation de $\vec{W}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).

Indication : Pensez à utiliser la question 2-(c) et le théorème de Stokes-Ampère.

Corrigé (1,5 pts) :

1^{ère} méthode : D'après le théorème de Stokes-Ampère et la question 2-(c) on a $\mathcal{T}_\Gamma(\vec{W}) = \phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{W})) = \phi_\Sigma(\vec{V}) = \frac{1}{3}$.

2^{ème} méthode : On oriente la courbe suivant la normale unitaire dont la deuxième composante est positive, en utilisant la règle d'Ampère. On déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\Gamma(\vec{W}) &= \int_\Gamma xdx + ydy - xydz \\ &= \int_{\Gamma_1} xdx + ydy - xydz + \int_{\Gamma_2} xdx + ydy - xydz + \int_{\Gamma_3} xdx + ydy - xydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta + 0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin^2(\theta)\cos(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos(\theta)d\theta = \left[\frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Rappel

1. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

2. Masse et longueur d'une courbe : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de masse curviligne (linéique) $\mu(x, y, z)$, alors

- (a) La masse totale de $\mathcal{C}$ est donnée par formule suivante :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

- (b) La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. L'aire d'une surface : Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, avec $(u, v) \in \Delta$ alors l'aire de Σ est donnée par formule suivante :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int \int_\Sigma d\sigma = \int \int_\Delta \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv$$

4. Flux à travers une surface : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}_\Sigma$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \int \int_\Sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma d\sigma.$$

5. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ . Si Γ est orienté dans le même sens que Σ (via la règle d'Ampère), alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ on a

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_\Sigma \text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

6. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$$